Министерство образования Кировской области
Кировское областное государственное образовательное
бюджетное учреждение   среднего профессионального образования
«Зуевский механико-технологический техникум»

Методические рекомендации для организации самостоятельной работы по учебной дисциплине «Математика» основной профессиональной образовательной программы

« Рано или поздно всякая правильная математическая идея находит применение в том или ином деле.»   А.Н. Крылов.

Методические указания включают в себя перечень образовательных результатов, заявленных в ФГОС СПО по специальности СПО 35.02.16 «Эксплуатация и ремонт сельскохозяйственной техники и оборудования» и 34.02.01 «Сестринское дело» и по профессиям СПО 08.01.08.«Мастер отделочных строительных работ», 35.01.13 «Тракторист - машинист сельскохозяйственного производства », учебную цель, задачи, обеспеченность занятия, краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме, вопросы для закрепления теоретического материала, задания для самостоятельной работы и инструкцию по ее выполнению, методику анализа полученных результатов, порядок и образец отчета о проделанной работе, критерии выполнения работ

Составитель: Карина О.В, преподаватель Кировского областного государственного образовательного бюджетного учреждения среднего профессионального образования «Зуевский механико-технологический техникум»

Рекомендован предметно-цикловой комиссией

Протокол № ____ от «_____»______2020г

Пояснительная записка.

Основная цель данной методической разработки состоит в организации самостоятельной работы обучающегося, который должен быть готов к решению практических задач и должен обладать общими компетенциями, включающими в себя способность:

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, исходя из цели и способов ее достижения, определенных руководителем.

ОК 3. Анализировать рабочую ситуацию, осуществлять текущий и итоговый контроль, оценку и коррекцию собственной деятельности, нести ответственность за результаты своей работы.

ОК 4. Осуществлять поиск информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в команде

Каждая самостоятельная работа имеет следующую структуру:

- Тема
- Цель
- Содержание задания
- Алгоритм выполнения или рекомендации по выполнению практической работы.
- Образец выполнения (по необходимости**)**

Данная методическая разработка строится на основе многосторонних межпредметных связей: с информатикой, физикой, а также выполняет интегрирующую и системообразующую функции формирования системного, аналитического и алгоритмического мышления. Критерии оценивания: оценка «5»100%, «4»-85%, «3»-70%.

Самостоятельная работа №1 «Приближенные вычисления»

Цель: научиться выполнять действия с приближенными величинами.

Приближенные вычисления.

Выполняя вычисления, всегда необходимо помнить о той точности, которую нужно или которую можно получить. Недопустимо вести вычисления с большой точностью, если данные задачи не допускают или не требуют этого (например, семизначная таблица логарифмов при вычислениях с числами, имеющими 5 верных значащих цифр - избыточна). Твёрдое знакомство с правилами приближенных вычислений необходимо каждому, кому приходится вычислять.

Погрешности.

Разница между точным числом x и его приближенным значением a называется **погрешностью** данного приближенного числа. Если известно, что $| x - a | < \Delta_a$, то величина Δ_a называется *предельной абсолютной погрешностью* приближенной величины a. Отношение $\Delta_a / a = \delta_a$ называется **предельной относительной погрешностью**; последнюю часто выражают в процентах.

<u>Пример</u>:

3,14 является приближенным значением числа π, погрешность его равна 0,00159..., предельную абсолютную погрешность можно считать равной 0,0016, а предельную относительную погрешность v равной 0.0016/3.14 = 0,00051 = 0,051%. Для краткости обычно слово предельная опускается.

Округление.

Если приближенное число содержит лишние (или неверные) знаки, то его следует округлить. При округлении сохраняются только верные знаки; лишние знаки отбрасываются, причем если первая отбрасываемая цифра больше или равна $d/2$, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу. При округлении возникает дополнительная погрешность, не превышающая половины единицы разряда последней значащей цифры округленного числа. Поэтому, чтобы после округления все знаки были верны, погрешность до округления должна быть не больше половины единицы того разряда, до которого предполагают делать округление.

Действия над приближенными числами.

Результат действий над приближёнными числами представляет собой также приближённое число. Погрешность результата может быть выражена через погрешности первоначальных данных при помощи следующих теорем:

1. Предельная абсолютная погрешность алгебраической суммы равна сумме предельных абсолютных погрешностей слагаемых.
2. Относительная погрешность суммы заключена между наибольшей и наименьшей из относительных погрешностей слагаемых.
3. Относительная погрешность произведения или частного равна сумме относительных погрешностей сомножителей или, соответственно, делимого и делителя.
4. Относительная погрешность n-ой степени приближенного числа в n раз больше относительной погрешности основания (как у целых, так и для дробных n).

Пользуясь этими теоремами, можно определить погрешность результата любой комбинации арифметических действий над приближенными числами.

Примеры:

$V = r^2h$

$D_v = Vd_{\,v} = V(2d_{\,r}+d_{\,n})$

$$Z = \sqrt{\frac{x}{1+y}};\ \delta_z = \frac{1}{2}(\delta_x + \delta_{1+y}) = \frac{1}{2}(\frac{\Delta_x}{x} + \frac{\Delta_y}{1+y})$$

Предельная абсолютная погрешность заведомо превосходит абсолютную величину истинной погрешности, поскольку предельное значение вычисляется в предположения, что различные погрешности усиливают друг друга; практически это бывает редко. При массовых вычислениях, когда не учитывают погрешность каждого отдельного результата, пользуются следующими правилами подсчета цифр. При соблюдении этих правил можно считать, что в среднем полученные результаты будут иметь все знаки верными, хотя в отдельных случаях возможна ошибка в несколько единиц последнего знака.

1. При сложении и вычитании приближённых чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближенном, данном с наименьшим числом десятичных знаков.
2. При умножении и делении в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет приближённое данное с наименьшим числом значащих цифр.
3. При возведении в квадрат или куб в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет возводимое в степень приближённое число (последняя цифра квадрата и особенно куба при этом менее надежна, чем последняя цифра основания).
4. При увеличении квадратного и кубического корней в результате следует брать столько значащих цифр, сколько их имеет приближённое значение подкоренного числа (последняя цифра квадратного и особенно кубического корня при этом более надёжна, чем последняя цифра подкоренного числа).
5. Во всех промежуточных результатах следует сохранять одной цифрой более, чем рекомендуют предыдущие правила. В окончательном результате эта запасная цифра отбрасывается.
6. Если некоторые данные имеют больше десятичных знаков (при сложении и вычитании) или больше значащих цифр (при умножении, делении, возведении в степень, извлечении корня), чем другие, то их предварительно следует округлить, сохраняя, лишь одну лишнюю цифру.

Если данные можно брать с произвольной точностью, то для получения результата с K цифрами данные следует брать с таким числом цифр, какое даёт согласно правилам 1-4(K+1) цифру в результате.

ЗАДАНИЕ.

I вариант.

1) Вычислите площадь параллелограмма, если a=68,7 и h=52,6. Укажите верные цифры ответа.

2) Найдите границу абсолютной погрешности произведения двух приближенных значений чисел a=7,36±0,004 и b=8,61±0,005.

3) С какой точностью надо измерить радиус круга, чтобы относительная погрешность площади круга не превышала 0,5%? Грубое приближенное значение R=8м.

II вариант.

1) Вычислите разность a=√11-√7 с четырьмя значащими цифрами. Найдите εa.
2) Вычислите относительную погрешность $\sqrt[3]{68,4}$.
3) С какой точностью надо измерить сторону квадрата, чтобы относительная погрешность площади квадрата не превышала 1%? Приближенное значение стороны квадрата a=9 м.

Самостоятельная работа №2 «Комплексные числа»

Цель: научиться изображать комплексные числа на координатной плоскости, выполнять действия над комплексными числами.

Начальные сведения о **мнимых** и **комплексных числах** приведены в разделе «Мнимые и комплексные числа». Необходимость в этих числах нового типа появилась при решении квадратных уравнений для случая $D < 0$ (здесь D – дискриминант квадратного уравнения). Долгое время эти числа не находили физического применения, поэтому их и назвали «мнимыми» числами. Однако сейчас они очень широко применяются в различных областях физики

и техники: электротехнике, гидро- и аэродинамике, теории упругости и др.

Комплексные числа записываются в виде: $a+ bi$. Здесь a и b – действительные числа, а i – мнимая единица, т.е. $i^2 = –1$. Число a называется абсциссой, a b – ординатой комплексного числа $a+ bi$. Два комплексных числа $a+ bi$ и $a – bi$ называются сопряжёнными комплексными числами.

Основные договорённости:

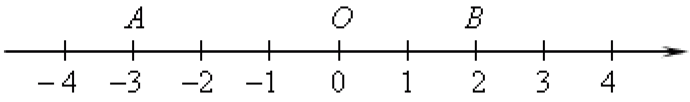
1. Действительное число a может быть также записано в форме комплексного числа: $a+ 0\,i$ или $a – 0\,i$. Например, записи $5 + 0\,i$ и $5 – 0\,i$ означают одно и то же число 5 .

2. Комплексное число $0+ bi$ называется *чисто мнимым числом*. Запись bi означает то же самое, что и $0+ bi$.

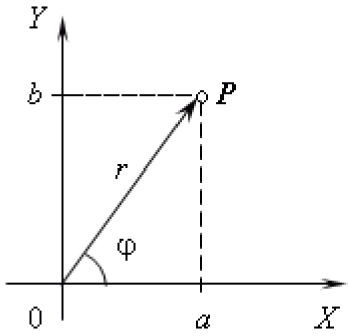
3. Два комплексных числа $a+ bi$ и $c+ di$ считаются равными, если $a= c$ и $b= d$. В противном случае комплексные числа не равны.

Геометрическое представление комплексных чисел.

Действительные числа изображаются точками на числовой прямой:



Здесь точка *A* означает число –3, точка *B* – число 2, и *O* – ноль. В отличие от этого комплексные числа изображаются точками на координатной плоскости. Выберем для этого прямоугольные (декартовы) координаты с одинаковыми масштабами на обеих осях. Тогда комплексное число a+bi будет представлено точкой P с абсциссой a и ординатой b (см. рис.). Эта система координат называется **комплексной плоскостью**.



Модулем комплексного числа называется длина вектора *OP*, изображающего комплексное число на координатной (комплексной) плоскости. Модуль комплексного числа $a+bi$ обозначается $|a+bi|$ или буквой r и равен:

$$r = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}\ .$$

Сопряжённые комплексные числа имеют одинаковый модуль. **Аргумент** комплексного числа - это угол φ между осью *OX* и вектором *OP*, изображающим это комплексное число. Отсюда, $\tan\varphi = b / a$.

Тригонометрическая форма комплексного числа. Абсциссу *a* и ординату *b* комплексного числа $a + bi$ можно выразить через его модуль r и аргумент φ

$$a = r\cos\varphi\ , \quad b = r\sin\varphi\ .$$

Тогда

$$a+bi = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\ .$$

Операции с комплексными числами, представленными в тригонометрической форме.

1. $z_1 \cdot z_2 = [r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)] [r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)] =$

$$= r_1 \cdot r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

2. $z_1 / z_2 = [r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)] / [r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)] =$

$$= r_1 / r_2 [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

3. $z^n = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$

   Это знаменитая формула Муавра.

4. $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \{\cos[(\varphi + 2\pi k)/n] + i \sin[(\varphi + 2\pi k)/n]\}.$

Здесь k - целое. Чтобы получить n различных значений корня n-ой степени из z необходимо задать n последовательных значений для k (например, $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$) .

ЗАДАНИЕ

1. На координатной плоскости дан круг с центром в начале координат и радиусом, равным 1 (рис. 94). Какие числа соответствуют точкам A1, A2, A3, A4, A5, A6,лежащим в вершинах правильного шестиугольника, вписанного в этот круг?

2. Дана точка, изображающая число -3+2*i*. Какие числа изображают точки, симметричные данной относительно: 1) действительной оси; 2) мнимой оси; 3) начала координат?

3. найдите действительные числа x и y из условия равенства двух комплексных чисел:

1) $9+2ix+4iy=10i+5x-6y$; 2) $2ix+3iy+17=3x+2y+18i$; 3) $5x-2y+(x+y)i=4+5i$/

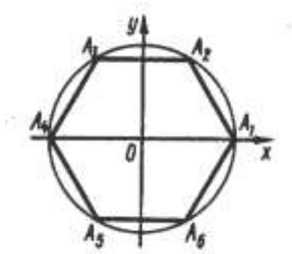


Рис. 94

4.Вычислите: 1) $\sqrt[4]{j}$

5.Решите двучленные уравнения: 1) $x^3 - 8=0$; 2) $8x^3 - 27=0$; 3) $x^3 + 125=0$; 4) $x^4 + 81=0$; 5) $x^6 - 64=0$.

6. Составите квадратное уравнение с действительными коэффициентами , корнями которого служат числа: 1) j и –j; 2) 3 + j и 3 –j ; 3) $1 - j\sqrt{5}$ и $1 + j\sqrt{5}$.

Самостоятельная работа № 3 «Действия с комплексными числами»

Цель: научиться выполнять действия над комплексными числами

Сложение. Суммой комплексных чисел a+ bi **и** c+ di называется комплексное число (a+ c) + (b+ d) i. Таким образом, при сложении комплексных чисел отдельно складываются их абсциссы и ординаты. Это определение соответствует правилам действий с обычными многочленами.

Вычитание. Разностью двух комплексных чисел a+ bi (уменьшаемое) и c+ di (вычитаемое) называется комплексное число (a – c) + (b – d) i. Таким образом, при вычитании двух комплексных чисел отдельно вычитаются их абсциссы и ординаты.

Умножение. Произведением комплексных чисел a+ bi и c+ di называется комплексное число:

(ac – bd) + (ad + bc) i . Это определение вытекает из двух требований:

1) числа a+ bi и c+ di должны перемножаться, как алгебраические двучлены,
2) число i обладает основным свойством: $i^2 = –1$.

Пример. (a+ bi)(a – bi)= $a^2 + b^2$. Следовательно, произведение двух сопряжённых комплексных чисел равно действительному положительному числу.

Деление. Разделить комплексное число a+ bi (делимое) на другое c+ di (делитель) - значит найти третье число e+ f i (чатное), которое будучи умноженным на делитель c+ di, даёт в результате делимое a+ bi. Если делитель не равен нулю, деление всегда возможно.

Пример. Найти (8 + *i*) : (2 – 3*i*) .

Решение . Перепишем это отношение в виде дроби: $\frac{8+i}{2-3i}$.

Умножив её числитель и знаменатель на 2 + 3i и выполнив все преобразования, получим:

$$\frac{(8+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{13+26i}{13} = 1+2i.$$

ЗАДАНИЕ

1 вариант

1) Найдите модуль и аргумент числа $\frac{8+2j}{5-3j}$

2) Выполните действия :$\frac{5+2j}{2-5j}$ - $\frac{3-4j}{4+3j}$

3) Возведите в степень по формуле Муавра $(-1 + j\sqrt{3})^9$

4) Решите уравнение $x^4 - 4x^2 + 16 = 0$.

11 вариант

1) Найдите модуль и аргумент числа $\frac{5+j}{2+3j}$

2) Выполните действия :$\frac{4+3j}{3-4j}$ - $\frac{5-4j}{4+5j}$

3) Возведите в степень по формуле Муавра$\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j\right)^6$

4) Извлечь корень $\sqrt[3]{8}$

Самостоятельная работа №4 «Корни и степени»

Цель: научиться выполнять действия со степенями корнями.

Правила действий со степенями и корнями, примеры.

$a^0=1;\ a\neq0$, пример: $2^0=1$

$a^{-n}=\frac{1}{a^n};\ a\neq0$, пример: $2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$

$a^n\cdot a^m=a^{(n+m)}$, пример: $2^3\cdot2^{14}=2^{(3+14)}=2^{17}$

$(a^n)^m=(a)^{(n\cdot m)}$, пример:$(2^3)^{14}=(2)^{(3\cdot14)}=2^{42}$

$\frac{a^m}{a^n}=a^{(m-n)};\ a\neq0$, пример: $\frac{2^{14}}{2^3}=2^{(14-3)}=2^{11}$

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b};\ a>0; b>0;\ n\in N,\ \text{пример: } \sqrt[3]{8\cdot 27}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{27}=6$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};\ a>0; b>0;\ n\in N,\ \text{пример: } \sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{2}{3}$$

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{|a|}\cdot\sqrt[n]{|b|};\ ab>0;\ n\in N,\ \text{пример: } \sqrt[3]{(-8)\cdot(-27)}=\sqrt[3]{8\cdot 27}=6$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}};\ ab>0; b\neq 0;\ n\in N,\ \text{пример: } \sqrt[3]{\frac{(-8)}{(-27)}}=\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{2}{3}$$

$$\sqrt[kn]{a^{km}}=\sqrt[n]{a^m};\ n,m\in N,\ \text{пример: } \sqrt[6]{2^9}==\sqrt{2^3}=\sqrt{8}$$

Примеры преобразований дробных выражений с корнями

1. $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

2. $\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2^3\cdot 2}=2\cdot\sqrt[3]{2}=2\sqrt[3]{2}$

$\frac{3}{\sqrt[3]{3}}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3^2}}=\frac{3\sqrt[3]{9}}{3}=\sqrt[3]{9}.$

3. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}=\frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2+\sqrt[3]{2}+1}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3-1}=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1.$

4 $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}=\sqrt[3]{\sqrt{2^2\cdot 2}}=\sqrt[3]{\sqrt{8}}=\sqrt[6]{8}.$

5. $\sqrt[3]{0{,}01\cdot a^4b^{10}}=\sqrt[3]{0{,}001\cdot 10\cdot a^3\cdot a\cdot b^9\cdot b}=\sqrt[3]{\left(0{,}1ab^3\right)^3\cdot 10ab}=0{,}1ab^3\sqrt[3]{10ab}.$

Примеры преобразования радикалов

1. $\left(\sqrt[5]{3}\right)^{15}=3^3=27.$

2. $\sqrt[4]{12}=\sqrt[4]{2^2\cdot 3}=\sqrt[4]{2^2}\cdot\sqrt[4]{3}=\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{3}.$

3. $5\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{5}}=5\cdot\sqrt[3]{\frac{3\cdot 5^2}{5^3}}=\sqrt[3]{75}.$

4. $\sqrt[4]{\left(2-\sqrt{5}\right)^4}=\sqrt{5}-2.$

5. $\sqrt[6]{x^2}=\sqrt[3]{|x|}.$

ЗАДАНИЕ

Найдите значение выражения $\left(-\sqrt[3]{253}\right)^3$, $\sqrt{\frac{1}{9}}+\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}}+\sqrt[4]{256}$;

Самостоятельная работа №5 «Степени с рациональными показателями»

Цель: научиться выполнять действия со степенями с рациональными показателями.

Степень с рациональным показателем

Степенью числа a > 0 с **рациональным показателем** $r = \frac{m}{n}$, где m – целое число, а n – натуральное (n > 1), называется число $\sqrt[n]{a^m}$

Итак, $\mathbf{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$

Например, $7^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{7}$; $2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32}$; $a^{-\frac{7}{15}} = \sqrt[15]{a^{-7}}$

Степень числа 0 определена только для положительных показателей; по определению $0^r = 0$, для любого $r > 0$

Замечания

1. Из **определения степени с рациональным показателем** следует, что для любого положительного a и любого рационального **r** число $\mathbf{a^r}$ **положительно**.
2. Любое рациональное число допускает различные записи его **в виде дроби**, поскольку $\frac{m}{n} = \frac{mk}{nk}$ для любого натурального k. Значение a^r также не зависит от формы записи рационального числа r.
3. При a < 0 рациональная степень числа **a** не определяется.

Для **степеней с рациональным показателем сохраняются основные свойства степеней**, верные для любых показателей (при условии, что основание степени будет положительным).

ЗАДАНИЕ:

1. Вычислить:

1) $27^{\frac{1}{3}}$; 2) $81^{-\frac{3}{4}}$; 3) $\frac{1}{16}^{-\frac{1}{2}}$.

2. Упростите выражения:

1) $8x^{\frac{5}{6}} : 4x^{-\frac{2}{3}}$; 2) $\left(x^{1/2} - y^{1/2}\right)\left(x^{1/2} + y^{1/2}\right)$.

3. Вычислить: а) $\left(-2^{-5} + 9\cdot\left(2^{-15}\right)^{1/3} + \left(\sqrt{2}\right)^{0}\right)^{-1}$; б) $\dfrac{\left(10^{\frac{1}{3}} - 7^{\frac{1}{3}}\right)\left(\sqrt[3]{100} + \sqrt[3]{70} + \sqrt[3]{49}\right)}{0{,}125}$;

в) $0{,}027^{-\frac{1}{3}} - \left(\dfrac{1}{6}\right)^{-2} + 256^{0{,}75} - 3^{-1} + 5{,}5^{0}$.

4. Выполнить указанные действия, перейдя к степени с рациональным показателем: $\sqrt{5\sqrt[3]{5}} : \left(\sqrt[3]{5\sqrt{5}} \cdot \sqrt[4]{5\sqrt[3]{5}}\right)^{1/2}$.

5.Упростить: $\dfrac{a^{5/4} - a^{1/4}}{a^{3/4} + a^{1/2}} : \dfrac{a^{1/2} + 1}{a^{1/2} + a^{1/4}} + 1$.

Самостоятельная работа № 6 «Решение показательных уравнений и неравенств»

Цель: научиться решать показательные уравнения и неравенства

Показательное уравнение – это уравнение, в котором неизвестное содержится в показателе степени

Решение показательных уравнений. Метод выноса за скобки

Образцы решения.

1.Решить уравнение: $3^{x+1} - 2\cdot 3^{x-2} = 25$

В левой части выносим за скобки степень с наименьшим показателем, то есть 3^{x-2}. В результате получим:

$$3^{x-2}\left(\frac{3^{x+1}}{3^{x-2}} - \frac{2\cdot 3^{x-2}}{3^{x-2}}\right) = 25$$

$$3^{x-2}\left(3^{x+1-(x-2)} - 2\right) = 25$$

$$3^{x-2}\left(3^{x+1-x+2} - 2\right) = 25$$

$$3^{x-2}\left(3^{3} - 2\right) = 25$$

$$3^{x-2}\cdot 25 = 25$$

$$3^{x-2} = 1, \quad 3^{x-2} = 3^{0}, \quad \text{отсюда следует, что } x = 2.$$

Ответ: x = 2.

Уравнения, сводящиеся к квадратным (метод замены)

Образцы решения.

1.Решить уравнение: $4^{x} + 2^{x+1} - 24 = 0$.

Решение: Заметив, что $4^{x} = (2^{2})^{x} = 2^{2x} = (2^{x})^{2}$, а $2^{x+1} = 2\cdot 2^{x}$

Перепишем заданное уравнение в виде:

$(2^x)^2 + 2\cdot 2^x - 24 = 0$
Вводим новую переменную: $t = 2^x$, тогда уравнение примет вид:
$t^2 + 2t - 24 = 0$
Решив квадратное уравнение, получим: $t_1 = 4$, $t_2 = -6$. Но так как $t = 2^x$, то надо решить два уравнения:
$2^x = 4$ и $2^x \neq -6$
Решим первое уравнение:
$2^x = 2^2$ отсюда следует, что $x = 2$.
Рассмотрим второе уравнение.
Второе уравнение не имеет решения, так как $2^x > 0$ для любых значений x.
Ответ: 2.

Образцы решения показательных неравенств

1.Решить неравенство $2^x - 2^{x-2} \leq 3$.
Решение:
Выносим за скобки степень с наименьшим показателем, т.е. 2^{x-2}.
Получим: $2^{x-2}(2^2 - 1) \leq 3$,
$2^x \cdot 3 \leq 3$,
$2^x \leq 1$, так как $2^0 = 1$ то
$2^x \leq 2^0$
Так как основание $2 > 1$, то неравенство равносильно неравенству того же смысла $x \leq 0$.
Ответ: $x \epsilon (-\infty; 0)$.
2.Решить неравенство $7^{2x} - 8\cdot 7^x + 7 > 0$
Решение.
Заменим : $7^x = t, t > 0;$
Получим неравенство: $t^2 - 8t + 7 > 0$. Трехчлен $t^2 - 8t + 7$ разложим на множители:
$(t-7)(t-1) > 0$.
$t < 7; t > 1$.
$7^x < 7$, $a = 7 > 1$, то $x < 1$
$7^x > 1$, $7^x > 7^0$, $a = 7 > 1$, то $x > 0$.
Ответ: $x \epsilon (-\infty; 1) \cup (0; \infty)$.

Задание

№п/п	Вариант 1	Вариант 2
Решить уравнения		
1	$3^{x+2} - 3^x = 72$	$2^x - 2^{x-4} = 15$
2	$2\cdot 3^{x+3} - 5\cdot 3^{x-2} = 1443$	$3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} = 3159$
3	$2^{2x} + 3\cdot 2^x - 10 = 0$	$2\cdot 4^x - 5\cdot 2^x + 2 = 0$
4	$\left(\frac{1}{6}\right)^{2x} - 5\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^x - 6 = 0$	$4\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^x + 15\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x - 4 = 0$
Решить неравенства		
1	$2^x + 2^{x+2} \leq 20$	$\left(\frac{1}{5}\right)^{3x+4} + \left(\frac{1}{5}\right)^{3x+5} > 6$
2	$7^x \geq 7^{x-1} + 6$	$2^{x+2} - 2^x > 96$
3	$7^{2x} - 8\cdot 7^x + 7 > 0$	$9^x - 6\cdot 3^x < 27$
4	$0{,}2^{2x} - 1{,}2\cdot 0{,}2^x + 0{,}2 > 0$	$\left(\frac{1}{7}\right)^{2x} - 8\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^x + 7 < 0$

Самостоятельная работа №7 «Логарифмы»

Цель: научиться вычислять логарифмы и выполнять преобразования логарифмических выражений

Логарифм числа b по основанию a определяется как <u>показатель степени</u>, в которую надо возвести <u>основание</u> a, чтобы получить число b.

Обозначение: $\log_a b$, произносится: "логарифм b по основанию a".

Из определения следует, что нахождение $x = \log_a b$ равносильно решению уравнения $a^x = b$. Например, $\log_2 8 = 3$, потому что $2^3 = 8$.

Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b$.

Свойство логарифмов:

1. $\log_a b + \log_a c = \log_a(b \cdot c)$;
2. $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$;
3. $\log_a b^r = r \cdot \log_a b$.

ЗАДАНИЕ

Вариант 1

1. Вычислить:

   1.1. $5{,}1^{\log_{5,1} 9}$; 1.2. $7^{\log_7 16}$; 1.3. $12^{1+\log_{12} 4}$; 1.4. $\log_2 \frac{1}{32}$;

   1.5. $\log_{27} 9$; 1.6.$3^{1+\log_3 5}$;.

2. Выяснить при каких значениях *X* имеет смысл выражение:

2.1.$\log_{\frac{1}{2}}(4 - x)$; 2.2. $\log_{\frac{2}{3}}(x^2 - 16)$; 2.3. $\log_3 \frac{7-3x}{x-4}$;

3. Вычислить:

3.1. $2^{2+\log_2 5}$; 3.2. $2^{3\log_2 4}$; 3.3. $\frac{\log_7 25}{\log_7 5}$.

4. Вычислить:

4.1. $\log_{15} 5 + \log_{15} 3$;

4.2. $\log_{0,1} 5 + \log_{0,1} 2$;

4.3.$\log_5 50 - \log_5 2$;

4.4.$\log_2 8^7$;

4.5.$\log_{13} \sqrt[5]{169}$;

4.6.$\frac{1}{2}\log_{10} 0{,}81 - 2\log_{10} 3$;

Самостоятельная работа № 8 « Решение логарифмических уравнений и неравенств»

Цель: научиться решать логарифмические уравнения и неравенства

Образцы решения логарифмических уравнений

1. **Решить уравнение:**

$\log_3(x - 2) + \log_3(x + 2) = \log_3(2x - 1)$

Решение: Используя формулу: $\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$, заменим сумму логарифмов произведением:
$\log_3((x-2)\cdot(x+2)) = \log_3(2x-1)$
$x^2 - 4 = 2x - 1$
$x^2 - 4 - 2x + 1 = 0$
$x^2 - 2x - 3 = 0$
$x_1 = 3; \quad x_2 = -1.$
Проверка:
$x_1 = 3$
$\log_3(3-2) + \log_3(3+2) = \log_3(2\cdot 3 - 1)$

$\log_3 5 = \log_3 5$

$x_2 = -1$
$\log_3(-1-2) + \log_3(-1+2) = \log_3(2\cdot(-1) - 1)$ - не существует.
Ответ: x= 3

2. Решить уравнение:

$\log_4^2 x + \log_4 x - 2 = 0$. Используем метод замены.
$\log_4 x = t \implies t^2 + t - 2 = 0$
$t_1 = 1, \qquad t_2 = -2$. Подставим в замену.
$\log_4 x = 1 \Rightarrow x = 4^1 = 4, \quad \log_4 x = -2 \Rightarrow x = 4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$.
Ответ: $x = 4; \quad x = \frac{1}{16}$.

ЗАДАНИЕ

Решить уравнения:

1) $\lg(x+4) - \lg(x-3) = \lg 8$;
2) $\lg(x+2) - \lg 5 = \lg(x-6)$;
3) $\lg(x-2) + \lg x = \lg 8$;
4) $\lg\sqrt{x-7} + \lg\sqrt{3x-8} = 1$;
5) $\log_5(x+10) = 2$;
6) $\log_x 2 + \log_x 3 = \frac{1}{3}$.

Логарифмические неравенства

Неравенства вида $\log_a x > c$, $\log_a x < c$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, называются *простейшими логарифмическими неравенствами*.

Имеют место следующие равносильные преобразования:

$$\log_a x > c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1, \\ x > a^c \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1, \\ 0 < x < a^c; \end{cases} \end{array}\right. \qquad (4.13)$$

$$\log_a x < c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1, \\ 0 < x < a^c \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1, \\ x > a^c; \end{cases} \end{array}\right. \qquad (4.14)$$

$$\log_{f(x)}\varphi_1(x)>\log_{f(x)}\varphi_2(x)\Leftrightarrow\begin{cases}\varphi_1(x)>0,\\ \varphi_2(x)>0,\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)>1,\\ \varphi_1(x)>\varphi_2(x)\end{cases}\\ \begin{cases}0<f(x)<1,\\ \varphi_1(x)<\varphi_2(x).\end{cases}\end{array}\right.\end{cases} \qquad (4.15)$$

Задание

Решить неравенства, выбрать правильное решение.

1. $\log_{½} x>0$,

1) $0<x<1$; 2) $x>1$; 3) $x>0$; 4) $x<1$.

2. $\log_2 (x+3) – \log_2 16 > 0$,

1) $x >13$, 2) $x> -3$, 3) $x<13$, 4) $x< -3$.

3. $\log_{0,2} (0,2+0,5x)>1$,

1) $(0,4;+\infty)$; 2) $(-0,4;0)$; 3) $(- \infty; - 0,4)$; 4) $(-\infty; 0)$.

4. Найдите наименьшее целое решение неравенства: $(4x -1) \log_{\sqrt{2}} x\geq 0$.

1) -1; 2) 2; 3) 1; 4) 0,5.

5. Решить неравенства:

1) $\log_3 (x + 2) < 3$; 2) $\log_8 (4 - 2x) \geqslant 2$;
3) $\log_{\frac{1}{3}} (x - 1) \geqslant -2$; 4) $\log_{\frac{2}{3}} (2 - 5x) < -2$.

1) $\log_{\frac{1}{5}} (3x - 5) > \log_{\frac{1}{5}} (x + 1)$;
2) $\log_{x-3} (x^2 + 4x - 5) > \log_{x-3} (x - 1)$;
3) $\log_2^2 (x - 1) - \log_{\frac{1}{2}} (x - 1) > 2$;
4) $\log_{\frac{1}{4}} (x + 1) \geqslant -2\log_{\frac{1}{16}} 2 + \log_{\frac{1}{4}} (x^2 + 3x + 8)$;
5) $\dfrac{1}{1 - \log_{\frac{1}{2}} x} + \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}} x} > 1$.

Степени чисел от 0 до 10

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049
4^n	1	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144	
5^n	1	5	25	125	625	3125	15625	78125	390625		
6^n	1	6	36	216	1296	7776	46656	279936			
7^n	1	7	49	343	2401	16807	117649				
8^n	1	8	64	512	4096	32768					
9^n	1	9	81	729	6561	59049					
10^n	1	10	100	1000	10000						

Решение квадратных уравнений:

$a \cdot x^2 + bx + c = 0$

$D = b^2 - 4ac,$

Если $D > 0$**, то** $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$

Если $D = 0$**, то** $x = \frac{-b}{2a}$

Если $D < 0$**, то корней нет**

Формулы сокращенного умножения:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b)$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Самостоятельная работа №9.

По теме: « Призма.»

Цели: закрепление понятий: прямоугольный параллелепипед, линейные размеры, диагональ, площадь боковой и полной поверхности призмы; содействовать воспитанию интереса к математике и ее приложениям.

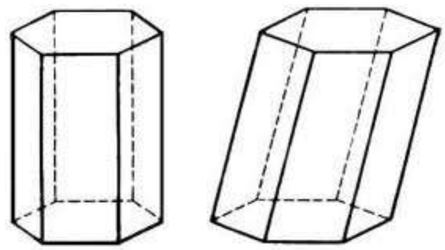
Оборудование: модели прямоугольного параллелепипеда, призм, линейки, карандаши, калькулятор.

Методические указания

Призма — многогранник, две грани которого являются многоугольниками, лежащими в параллельных плоскостях, а остальные грани — параллелограммами, имеющими общие стороны с этими многоугольниками.

Виды призм.

- Призма, основанием которой является параллелограмм, называется **параллелепипедом**.
- **Прямая призма** - это призма, у которой боковые ребра перпендикулярны плоскости основания. Другие призмы называются **наклонными**.
- **Правильная призма** - это прямая призма, основанием которой является правильный многоугольник. Боковые грани правильной призмы - равные прямоугольники.



прямая призма наклонная призма

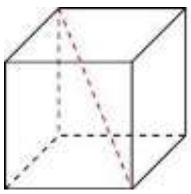
Свойства призмы:

- Основания призмы являются равными многоугольниками.
- Боковые грани призмы являются параллелограммами.
- Боковые ребра призмы параллельны и равны.

Площадь боковой поверхности прямой призмы: $\mathbf{S_{б.п.} = P_{осн} \cdot H}$, где P — периметр основания призмы (сумма всех сторон основания), H — высота призмы.

Важно знать формулы $\mathbf{S_{квадр.} = a^2}$ $\mathbf{S_{прямоуг} = ав}$

Площадь полной поверхности призмы равна сумме площади её боковой поверхности и удвоенной площади основания: $\mathbf{S_{п.п.} = P_{осн} \cdot H + 2 \cdot S_{осн}}$



Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его линейных размеров: $\mathbf{d^2 = a^2 + b^2 + c^2}$

Использование призм: в строительстве, в быту, в технике, в медицине(лечение косоглазия)

Задание к практической работе: по данным вам моделям найти площадь боковой, полной поверхности,.

Пример: Найти площадь боковой, полной поверхности призмы.

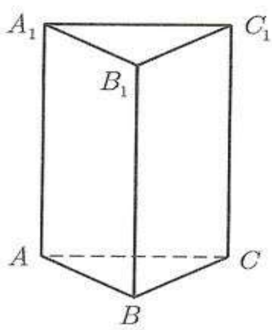
Ход работы

1.Для нахождения площади боковой поверхности призмы нужно измерить линейкой следующие элементы призмы: стороны основания, высоту. Подставить значения в формулу для нахождения площади (если призма прямая)

2. Для нахождения площади полной поверхности призмы нужно найти площадь основания призмы (площадь треугольника, прямоугольника, ромба)

Площадь полной поверхности призмы находиться как сумма площадей боковой поверхности и двух оснований.

Оформление работы:



Дано: $ABCC_1B_1A_1$ треугольная призма, прямая, правильная

AB=BC=AC = 5 см, H = 10 см

Найти: $S_{б.п.}$, $S_{п.п.}$

Решение: $S_{б.п.} = P \cdot H$

P=5+5+5=15, H=10

$S_{б.п.} = 15 \cdot 10 = 150$ (см^2)

Фóрмула Герона позволяет вычислить площадь треугольника (S) по его сторонам a, b, c:

$S_{осн} = \sqrt{p(p-a)(p-в)(p-c)}$

где p — полупериметр треугольника:
p = (a+в+c):2

p= 15:2 =7,5
$S_{п.п.} = P \cdot H + 2 \cdot S_{осн,} = 150 + 2 \cdot 7{,}7 = 164{,}4$ (см^2)

3. Выполняют задания для самостоятельной работы (тесты, состоящие из двух вопросов и двух задач).

Задания для самостоятельной работы:

Вариант 1

1. Сколько ребер у шестиугольной призмы?

Ответ: а)18,   б)24,   в)12.

2.Выберите верное утверждение.

а) призма называется правильной, если ее основания - правильные многоугольники;

б) у треугольной призмы две диагонали;

в) высота призмы равна ее боковому ребру;

3.Задача . Найдите длину диагонали прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны 2м, 3м, 5м.

4. **Задача.** Коллекционер заказал аквариум, имеющий форму правильной четырехугольной призмы. Сколько квадратных метров стекла необходимо для изготовления аквариума, если сторона основания 70 см, а высота 60 см?

Вариант 2

1.Сколько граней у шестиугольной призмы?

Ответ: а)6, б)8,   в)10

2. Выберите верное утверждение.

а) площадь полной поверхности призмы называется сумма площадей ее боковых граней и основания;

б) у треугольной призмы нет диагоналей;

в) высота прямой призмы равна ее боковому ребру;

3.**Задача.** Найдите длину диагонали прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны 3см, 4см, 5см.

4. Задача Необходимо изготовить короб с крышкой для хранения картофеля в форме прямой призмы высотой 0,7 м. В основании призмы лежит прямоугольник со сторонами 0,4 м и 0,6 м. Сколько фанеры понадобиться для изготовления короба?

Вариант 3

1.Сколько граней у четырехугольной призмы?

Ответ: а)6,   б)8,   в)10

2. Выберите верное утверждение.

а) У n – угольной призмы 2 n ребер;

б) площадь полной поверхности призмы называется сумма площадей ее боковых граней;

в) у треугольной призмы три диагонали;

3.**Задача.** Сколько необходимо купить листов 8 – волнового шифера размером 1750*1130 мм на покрытие крыши здания длиной 10 м. Фронтон имеет форму равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой 10 м и катетом 7 м.

4. **Задача.** Нужно оклеить обоими типа « рогожка», комнату, длина которой 6м, ширина 4м, высота 3м, площадь окон и дверей составляет 1/5 всей площади стен. Сколько нужно рулонов обоев для оклейки комнаты, если длина рулона 12 м, а ширина 50 см?

Самостоятельная работа № 10

По теме: «Пирамида»

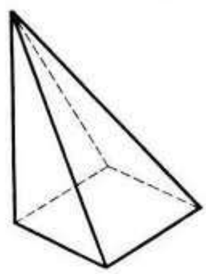
Цели: закрепление понятий: пирамида, площадь боковой и полной поверхности пирамиды; воспитание познавательной активности , показать возможность применения пирамиды в различных областях.

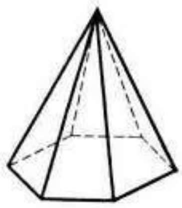
Оборудование: модели пирамид, таблица с формулами $S_{б.п.}$, $S_{п.п.}$, линейки, карандаши, калькулятор.

Методические указания.

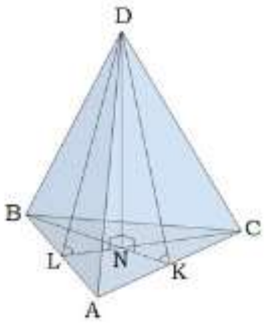
Пирами́да — многогранник, основание которого — многоугольник, а остальные грани — треугольники, имеющие общую вершину. По числу углов основания различают пирамиды треугольные, четырёхугольные и т. д.

наклонная **прямая**





Элементы пирамиды.



Д – вершина пирамиды

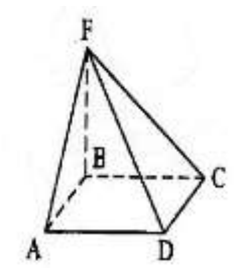
ДВ, ДС, ДА - боковые ребра — общие стороны боковых граней;

ДВА, ДАС, ДВС - боковые грани — треугольники, сходящиеся в вершине пирамиды

ДК, ДL - апофема — высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины [ℓ], **ДN** – высота пирамиды

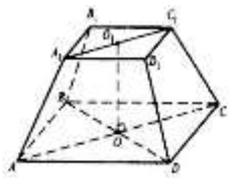
Пирамида называется правильной, если основанием её является правильный многоугольник, а вершина проецируется в центр основания. Тогда она обладает такими свойствами:

боковые ребра правильной пирамиды равны; в правильной пирамиде все боковые грани — равные равнобедренные треугольники; в любую правильную пирамиду можно как вписать, так и описать около неё сферу;



Прямоугольная пирамида

Пирамида называется прямоугольной, если одно из боковых рёбер пирамиды перпендикулярно основанию. В данном случае, это ребро и является высотой пирамиды.



Усечённая пирамида

Усечённой пирамидой называется многогранник, заключённый между основанием пирамиды и секущей плоскостью, параллельной её основанию.

Боковая поверхность — это сумма площадей боковых граней.

Для нахождения боковой поверхности в правильной пирамиде можно использовать формулу:

$S_{б.п.}= 1/2 \bullet P \bullet \ell$, где Р – периметр основания.

Полная поверхность — это сумма площади боковой поверхности и площади основания.

Для нахождения полной поверхности в правильной пирамиде можно использовать формулу:

$S_{п.п.} = 1/2 \bullet P \bullet \ell + S_{осн.}$

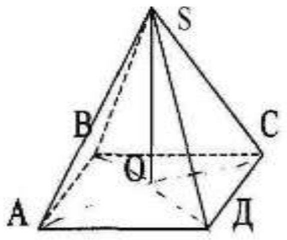
<u>Задание к практической работе: по данным вам моделям найти площадь боковой, полной поверхности. Выполнить тесты</u>.

Пример: Найти площадь боковой, полной поверхности.

<u>Ход работы</u>

1.Для нахождения площади боковой поверхности пирамиды нужно измерить линейкой следующие элементы: апофему, стороны основания, высоту. Подставить значения в формулу для нахождения пощади (если пирамида правильная). Если пирамида наклонная, то боковую поверхность находим из суммы площадей граней.
2. Для нахождения площади полной поверхности пирамиды нужно найти площадь основания пирамиды (площадь треугольника, прямоугольника, ромба)
3.Площадь полной поверхности пирамиды находиться как сумма площадей боковой поверхности и основания.

Оформление работы:



Дано: SABCД – пирамида, ABCД –прямоугольник. AB=3см, BC= 6см, H=10см, ℓ_1=10,5см., ℓ_2=10,2см , ℓ- апофема. Найти: $S_{б.п.}$ $S_{п.п.}$

Решение.

т.к. пирамида неправильная, то $S_{б.п.}$ находят как сумму площадей ее боковых граней, т.е. площадей треугольников. $S_1 = 1/2 \cdot \ell_1 \cdot AB = 1/2 \cdot 10{,}5 \cdot 3 = 15{,}75$(см^2) - это площадь одной грани, а их две одинаковых, т.е

$S_{1,2} = 15{,}75 \cdot 2 = 31{,}5$(см^2)

$S_3 = 1/2 \cdot \ell_2 \cdot BC = 1/2 \cdot 10{,}2 \cdot 6 = 30{,}6$ (см^2), $S_{3,4} = 2 \cdot 30{,}6 = 61{,}2$(см^2)

$S_{б.п.} = 31{,}5 + 61{,}2 = 92{,}7$(см^2)

$S_{осн.} = AB \cdot BC = 3 \cdot 6 = 18$(см^2), $S_{п.п.} = S_{б.п} + S_{осн.} = 92{,}7 + 18 = 110{,}7$ (см^2)

2. Выполняют тесты, состоящие из трех вопросов и одной задачи.

Задания для самостоятельной работы:

Вариант 1

1. Сколько ребер у шестиугольной пирамиды:
а)6; б)12; в)18; г)24;

2. Какое наименьшее число граней может иметь пирамида:
а)5; б)4 в)10; г)6

3. Подтвердите или опровергните следующие утверждения: Да ^ нет

а) Многогранник, составленный из n-треугольников, называется пирамидой;
б) Пирамида называется правильной, если ее основание – правильный многоугольник;
в) Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется апофемой;

4.Задача. Крыша башни имеет вид правильной четырехугольной пирамиды, у которой сторона основания равна 12 м, а высота 18 м. Сколько понадобится плиток на покрытие этой крыши, если каждая плитка имеет вид прямоугольника со сторонами 22 см и 18 см.

Вариант 2

1. Сколько граней у шестиугольной пирамиды:
а)6; б)7; в)8; г)10;

2. Какое наименьшее число ребер может иметь пирамида:
а)6; б)5; в)4; г)7;
3 Подтвердите или опровергните следующие утверждения: Да ^ нет
а) Высота пирамиды называется высотой грани;
б) Площадь боковой поверхности пирамиды равна произведению периметра основания на высоту;
в) Пирамида называется правильной, если ее основание – правильный многоугольник;

4.Задачи. Одно из самых грандиозных сооружений древности – пирамида Хеопса – имеет форму правильной четырехугольной пирамиды с высотой 150 м и боковым ребром 220 м. Найдите площадь боковой поверхности

Вариант 3

1. Сколько ребер у четырехугольной пирамиды:
а)6; б)12; в) 8

2. Какое наименьшее число граней может иметь пирамида:
а)5; б)4 в)10; г)6

3.Подтвердите или опровергните следующие утверждения: Да ^ нет
а)Существует ли четырехугольная пирамида, у которой противоположные боковые грани перпендикулярны к основанию?
б)Высота пирамиды, это перпендикуляр, проведённый из вершины к основанию.
в)Общая точка боковых граней пирамиды называется вершиной

4.Задача. Крыша имеет форму пирамиды с квадратным основанием 4,5 м х 4,5 м и высотой 4 м. Сколько листов железа размером 70 см х 140 см нужно для покрытия крыши, если на отходы нужно добавить 10% площади крыши?

Самостоятельная работа №11 .

По теме: «Цилиндр »

Цели: закрепление понятий: цилиндр, площадь боковой, полной поверхности; способствовать развитию математического мышления, формировать умения анализировать, сравнивать, обобщать.

Оборудование: модели цилиндра, тесты, калькулятор, линейки, карандаши.

Методические указания.

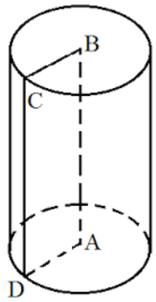
Цили́ндр — геометрическое тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя параллельными плоскостями, пересекающими её

Круги, лежащие в параллельных плоскостях, называются основаниями цилиндра, а отрезки, соединяющие соответствующие точки оснований, - образующими цилиндра.

Поверхность, состоящая из образующих, называется боковой поверхностью цилиндра.

Цилиндр прямой круговой может быть получен путем вращения прямоугольника вдоль стороны как оси.

Элементы цилиндра.



R= АД – радиус цилиндра; **D** – диаметр.

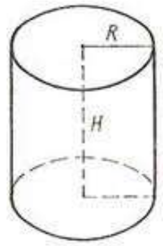
H = AB – высота;

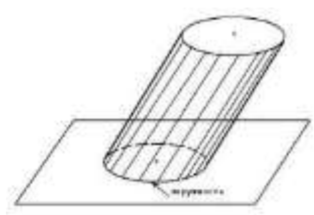
L =СД – образующая.

S = πR ^{2} - площадь круга. **D = 2R.**

C – длина окружности**. C = 2πR**

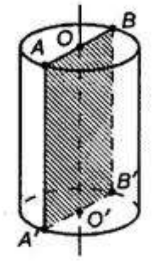
Виды цилиндров:

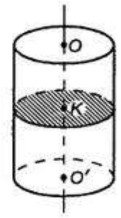




прямой — наклонный

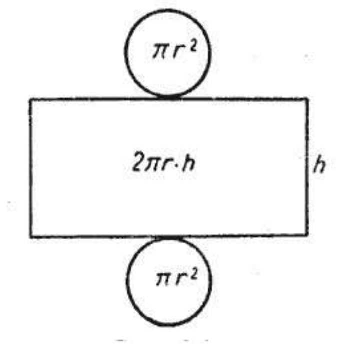
Сечения цилиндра:





осевое сечение — **сечение плоскостью перпендикулярной оси**

Площадь боковой поверхности прямого цилиндра вычисляется по его развёртке. Развёртка цилиндра представляет собой прямоугольник с высотой h (H) и длиной равной длине окружности основания 2πR.



Следовательно, площадь боковой поверхности цилиндра равна площади его развёртки и вычисляется по формуле: **$S_{б.п.}$= 2πR•H**

Площадь полной поверхности находиться как сумма боковой поверхности и двух площадей основания (круга), вычисляется по формуле: **$S_{п.п.}$= 2πR•H+2πR^2**

Использование цилиндров: в одежде, в быту, медицине, в технике: двигатель внутреннего сгорания, на железнодорожном транспорте, на автомобильном транспорте, в архитектуре и строительстве и т.д.

<u>Задание: по данным вам моделям найти площадь боковой поверхности, полной поверхности цилиндра</u>

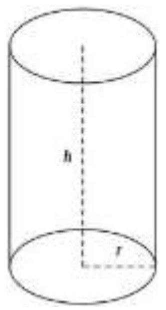
Ход работы:

1.а) Для нахождения площади боковой поверхности цилиндра нужно измерить линейкой следующие элементы: диаметр, высоту. Подставить значения в формулу для нахождения площади боковой поверхности цилиндра.

б) Для нахождения площади полной поверхности цилиндра нужно найти площадь основания цилиндра (площадь круга $\pi \cdot R^2$). Подставить данные в формулу площади полной поверхности или найти как сумму площадей боковой поверхности и двух оснований.

Пример: Найти площадь боковой, полной поверхности .

Оформление работы:

	**Дано**: цилиндр, H=12см, R=3см **Найти:** $S_{б.п.}$ $S_{п.п.}$ **Решение:** $S_{б.п.} = 2\cdot\pi\cdot R\cdot H = 2\cdot\pi\cdot 3\cdot 12 = 72\pi(см^2)$ $S_{п.п.} = 2\cdot\pi\cdot R\cdot H + 2\cdot\pi\cdot R^2 = 72\pi + 2\cdot\pi\cdot 3^2 = 72\pi + 18\pi = \; = 90\pi\ (см^2)$

2.Выполняют тесты, состоящие из одного вопроса и двух задач.

Задания для самостоятельной работы:

1вариант

1.Выберите верное утверждение.

а)Длина образующей цилиндра называется радиусом цилиндра;
б) Цилиндрическая поверхность называется боковой поверхностью цилиндра;
с) Площадь боковой поверхности цилиндра вычисляется по формуле $S_{бок} = \pi r^2 h$;

2.Задача. Сколько понадобится краски, чтобы покрасить бак цилиндрической формы с крышкой, имеющий диаметр основания 1,25 м и высоту 1,44 м, если на один квадратный метр расходуется 0,25 кг краски (найдите с точностью до 0,1 кг)?

3.Задача. .Цилиндрический паровой котёл с крышкой имеет диаметр 2 м и длину 10 м. Вычислить полную поверхность котла.

2 вариант.

1.Выберите верное утверждение.

а) Радиус цилиндра не может равняться высоте цилиндра;

б) Площадь полной поверхности цилиндра вычисляется по формуле $S_{цил} = \pi r(h+r)$;

с) Цилиндр может быть получен в результате вращения прямоугольника вокруг одной из его сторон.

2. Задача. Высота ведра, имеющего форму цилиндра, равна 28 см, диаметр дна 20 см. Вычислить, сколько квадратных дециметров оцинкованного железа пошло на изготовление ведра, если отходы составляют 20 % от всего заготовленного железа.

3.Задача. Развертка боковой поверхности цилиндра – квадрат со стороной 2. Найдите площадь полной поверхности цилиндра с точностью до 0,001.

3 вариант.

1.Выберите верное утверждение.

а) Цилиндр может быть получен в результате вращения треугольника вокруг своей стороны;

б) Длина образующей цилиндра называется диаметром цилиндра;

с) Площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению площади основания цилиндра на его высоту.

2.Задача. Сколько квадратных метров жести израсходовано на изготовление 1 млн. консервных банок диаметром 10 см и высотой 5 см (на швы и отходы добавить 10% материала).

3.Задача. Пизанская башня находиться в итальянском городе Пиза. Высота башни составляет 55м. Диаметр основания равен 15 м.Найти площадь боковой и полной поверхности.

Самостоятельная работа № 12

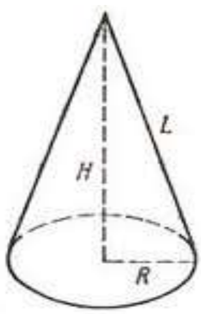
По теме:» Конус.»

Цели:закрепление понятий: конус, площадь полной поверхности конуса, воспитание познавательной активности, показать применение конуса в различных областях, развитие логического мышления.

Оборудование: модели конуса, линейки, карандаши, калькулятор.

Методические указания.

Конусом называется тело, которое состоит из круга - основание конуса, точки, не лежащей в плоскости этого круга - вершины конуса, и всех отрезков, соединяющих вершину конуса с точками основания.



Отрезок, соединяющий вершину и границу основания, называется **образующей конуса (ℓ).**

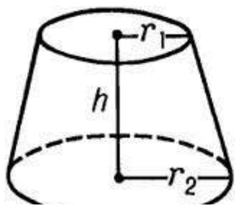
Отрезок, опущенный перпендикулярно из вершины на плоскость основания (а также длина такого отрезка), называется **высотой конуса (H).**

R – радиус основания.

Круговой конус — конус, основание которого является кругом.

Прямой круговой конус (часто его называют просто конусом) можно получить вращением прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей катет (эта прямая представляет собой ось конуса)

Часть конуса, лежащая между основанием и плоскостью, параллельной основанию и находящейся между вершиной и основанием, называется **усечённым конусом**.



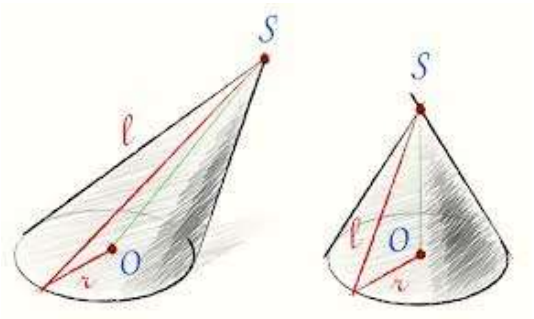
Площадь боковой поверхности усеченного конуса –

$S_{бок} = \pi\ \ell\ (r_1 + r_2)$.

где r_1 – радиус верхнего основания ,

r_2 - радиус нижнего основания.

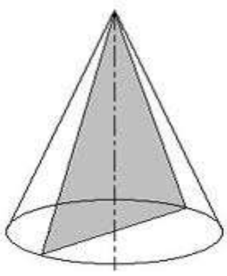
Виды конусов:



наклонный **прямой**

Боковая поверхность конуса можно вычислить по формуле: $\mathbf{S_{б.п.} = \pi R\ell}$, где R — радиус основания, ℓ — длина образующей.

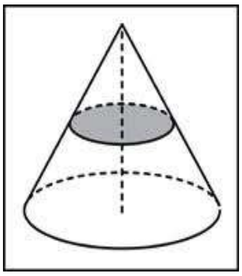
Полная поверхность конуса равна сумме площадей боковой поверхности и площади основания: $\mathbf{S_{п.п.} = \pi R\ell + \pi R^2}$.



Сечения конуса:

Сечение конуса плоскостью, проходящей через его ось, называют **осевым сечением**.

(сечением является равнобедренный треугольник)



Сечение плоскостью перпендикулярной оси конуса:

(сечением является круг).

Применение конусов.

Знания о конусе широко применяются в быту, производстве и науке. мы. Например, мы используем ведра, имеющие форму усеченного конуса; крыши старинных замков похожи на конусы; для переливания жидкостей мы берем воронку, которая также имеет форму усеченного конуса. Во время спортивных соревнований, ограждения для движения в автошколах применяют спортивные фишки.

Задание: по данным вам моделям найти площадь боковой поверхности, полной поверхности.

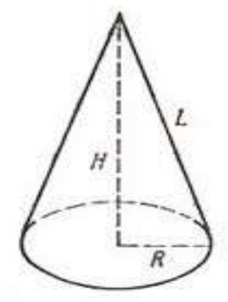
Ход работы:

1.а) Для нахождения площади боковой поверхности конуса нужно измерить линейкой следующие элементы: диаметр, высоту. Подставить значения в формулу для нахождения площади боковой поверхности конуса .

б) Для нахождения площади полной поверхности конуса нужно найти площадь основания конуса площадь круга $\pi \cdot R^2$). Подставить данные в формулу площади полной поверхности

Пример: Найти площадь боковой, полной поверхности.

Оформление работы:



Дано: конус, H=10см, R=6см, ℓ= 11,6см

Найти: $S_{б.п.}$ $S_{п.п.}$

Решение: $S_{б.п.} = \pi R\ell = \pi \cdot 6 \cdot 11{,}6 = 69{,}6\pi$ (см^2)

$S_{п.п.} = \pi R\ell + \pi R^2 = \pi \cdot 6 \cdot 11{,}6 + \pi \cdot 6^2 = 105{,}6\pi$ (см^2)

2. Выполняют тесты, состоящие из одного вопроса и двух задач

Задания для самостоятельной работы:

1 вариант

1. Выберите верное утверждение:

а) конус может быть получен в результате вращения равностороннего треугольника вокруг его стороны;

б) прямая, проходящая через вершину конуса и центр его основания, называется осью конуса;

в) разверткой боковой поверхности усеченного конуса является круг;

2.Задача. Высота конуса равна15 см, а образующая 16 см. Найдите радиус конуса.

3.Задача. Сколько квадратных метров брезента потребуется для сооружения палатки конической формы? Высотой 1,5м и радиусом 2 м?

2 вариант

1.Выберите неверное утверждение:

а) конус может быть получен в результате вращения прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов;

б) конус называется равносторонним, если его осевое сечение – правильный треугольник.

в) Площадь боковой поверхности конуса может быть вычислена по формуле $S_{бок.} = \pi r(r + \ell)$;

2.Задача. Образующая конуса, равна 8 см, наклонена к плоскости основания под углом 30º. Найдите площадь осевого сечения конуса.

3.Задача. Коническая крыша башни имеет диаметр 6 м и высоту 2 м. Сколько листов кровельного железа потребуется для этой крыши, если размер листа 0,7 м х 1,4 м, а на швы и обрезки тратиться 10% от площади крыши?

3 вариант

1.**Выберите верное утверждение**

а) сечение конуса, проходящее через ось, есть круг;

б) конус получен в результате вращения прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов;

в) осевым сечением усеченного конуса является прямоугольник.

2.Задача. Осевое сечение конуса – правильный треугольник, со стороной 2r . Найти площадь сечения проведенного через две образующие конуса, угол между которыми равен 60^0

3.Задача. .Сколько потребуется краски, для того чтобы покрасить пожарное ведро, если на 100см² необходимо затратить 10г? Радиусом 20 см, а высотой 45 см.

Самостоятельная работа № 13

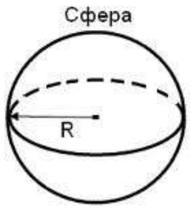
По теме: « Шар »

Цели: закрепление понятий: шар, сфера, площадь сферы, сечения, продолжить формирование навыков решения задач с использованием теоретического материала; развивать творческую активность учащихся.

Оборудование: модели шара (клубки), плакат с формулами площади сферы, линейки, карандаши, калькулятор.

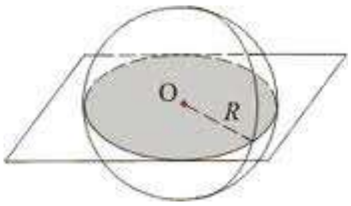
Методические указания.

Сфе́ра — замкнутая поверхность, геометрическое место точек в пространстве, равноудалённых от данной точки, называемой центром сферы. Сфера также является телом вращения, образованным при вращении полуокружности вокруг своего диаметра. Сфера является поверхностью шара.



Шар - это тело, ограниченное сферической поверхностью. Можно получить шар, вращая полукруг (или круг) вокруг диаметра.

Сечения шара



Наибольший круг лежит в сечении, проходящем через центр шара, и называется большим кругом. Его радиус равен радиусу шара. Все плоские сечения шара – круги.

Площадь сферы: $S_{сферы} = 4\pi \cdot R^2$, R – радиус шара.

Длина окружности: $C = 2\pi R$, **$S = \pi R^2$ - площадь круга**

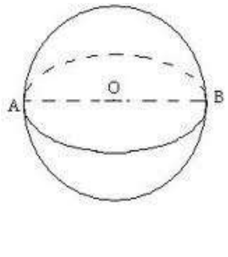
В мире все течет, все изменяется, но неизменно одно: у природы нет прямого угла. Идеальная форма – шар. Форму шара имеет не только Земля , но и другие планеты Солнечной системы. В царстве растений и животных распространены шарообразные формы.

Задание: по данным вам моделям найти площадь сферы .

<u>Ход работы</u>:

1.Для нахождения площади сферы нужно нитью клубка измерить «экватор», т.е длину окружности большого круга. Выразить из формулы длины окружности радиус и подставить в формулу площади сферы.

Пример:

	**Дано**: шар, C= 15см. **Найти:** $S_{сферы}$ **Решение:** длина окружности вычисляется по формуле: $C = 2\pi R$, отсюда найдем $R = C/2\pi = 15/2 \cdot 3{,}14 = 2{,}39$см $S_{сферы} = 4\pi \cdot R^2 = 4\pi \cdot 2{,}39^2 = 22{,}85\pi$ (см^2)

2.Выполняют тесты, состоящие из одного вопроса и двух задач.

Задания для самостоятельной работы:

1вариант.

1.Выберите верное утверждение.

а) Если точка удалена от центра сферы на расстояние, больше радиуса сферы, то она не принадлежит сферы.

б) Центр сферы не принадлежит данной сфере.

в) Всякое сечение сферы плоскостью есть окружность.

2.Задача .Сколько квадратных метров шелковой материи надо взять для приготовления оболочки воздушного шара диаметром 12 м, если на швы надо прибавить 5% материала?

3.**Задача**. На позолоту 1 кв. м купола идет 1 г золота. Сколько потребуется золота, чтобы позолотить купол окружностью 20 м? Форма купола – полусфера.

2 вариант.

1.Выберите верное утверждение.

а)Сфера может быть получена в результате вращения полуокружности вокруг диаметра.

б) Тело, ограниченное сферой, называется шаром.

в) Всякое сечение сферы есть круг.

1. **Задача**. На окраску шара диаметром 1,5 дм расходуется 50 г краски. Сколько краски требуется для окраски шара диаметром 3 дм?

3.Задача.Сколько метров шелковой материи шириной 1,1 м надо для изготовления воздушного шара, радиус которого 2 м? На соединение и отходы идет 10% материала.

3 вариант.

1.Выберите верное утверждение.

а)Сфера является поверхностью шара.

б)Всякое сечение сферы плоскостью есть круг.

в)Радиус любого сечения сферы плоскостью не больше радиуса сферы.

2.Задача. Сколько потребуется краски, чтобы покрасить шар диаметром 22,4 м, если на окраску 1 $м^2$ уходит 120г краски?

3. Задача .Сколько квадратных метров шелковой материи надо взять для приготовления оболочки воздушного шара диаметром 10 м, если на швы надо прибавить 7% материала?

Самостоятельная работа № 14

По теме: « Объем призмы.» **Цели:** закрепление формулы объема призмы в процессе решения задач, активизировать познавательный интерес к предмету ;развитие логического мышления.

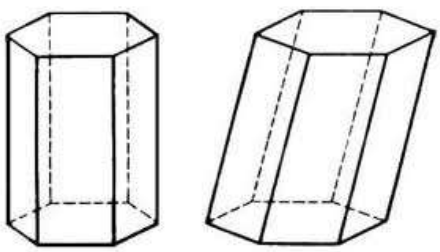
Оборудование: модели прямоугольного параллелепипеда, призм, линейки, карандаши, калькулятор.

Методические указания.

Призма — многогранник, две грани которого являются многоугольниками, лежащими в параллельных плоскостях, а остальные грани — параллелограммами, имеющими общие стороны с этими многоугольниками.

Виды призм

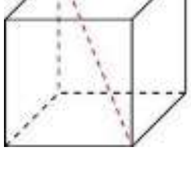
- Призма, основанием которой является параллелограмм, называется **параллелепипедом**.
- **Прямая призма** - это призма, у которой боковые ребра перпендикулярны плоскости основания. Другие призмы называются **наклонными**.
- **Правильная призма -** это прямая призма, основанием которой является правильный многоугольник. Боковые грани правильной призмы - равные прямоугольники.



прямая призма наклонная призма .

Объём призмы равен произведению её высоты на площадь основания:

$$V = S_{осн.} \cdot H, \quad H \text{ — высота призмы}$$



Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его линейных размеров: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Плотность находится по формуле:

$\rho = \frac{m}{V}$, где m — масса тела, V — его объём;

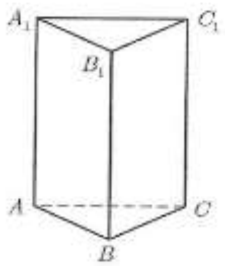
<u>Задание к практической работе: по данным вам моделям найти объем призмы.</u>

Пример: Найти объем призмы.

Ход работы

1.Для нахождения объема призмы нужно измерить линейкой следующие элементы призмы: стороны основания, высоту. Подставить значения в формулу для нахождения объема (если призма прямая)

Оформление работы:



Дано: $ABCC_1B_1A_1$ треугольная призма, прямая, правильная

AB=BC=AC = 5 см, H = 10 см

Найти: V

Решение:
Фо́рмула Герона позволяет вычислить площадь треугольника (S) по его сторонам a, b, c:

$S_{осн}= \sqrt{p(p-a)(p-в)(p-c)}$

где p — полупериметр треугольника:
p = (a+в+c):2

p= 15:2 =7,5

$S_{осн}= \sqrt{7,5(7,5-5)(7,5-5)(7,5-5)}= 7,7$ (см^2)

$V = S_{осн.}$•H = 7,7•10 =108 (см^3)

3. Выполняют задания для самостоятельной работы (тесты, состоящие из двух вопросов и двух задач).

Вариант 1.

1.Выберите верное утверждение:

а) объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений на длину диагонали параллелепипеда;

б) равные тела имеют равные объемы;

в) за единицу измерения объемов принимается квадрат, сторона которого равна единице измерения отрезков.

2. Сколько граней у прямоугольного параллелепипеда ?

а) 8, б) 6 , в) 4

3.Задача. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда по трём его измерениям, равным 3 см, 4 см, 5 см.

4.Задача. Сколько нужно рабочих для переноса дубовой балки размером 6,5 м х 30 см х 45 дм? Каждый рабочий может поднять в среднем 80 кг. Плотность дуба 800 кг/см^3.

Вариант 2.

1.**Выберите верное утверждение**:

а) объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений;

б) объем куба равен квадрату его ребра;

в) тела, имеющие равные объемы равны;

2. Сколько вершин у прямоугольного параллелепипеда ?

а) 8 , б) 4, в) 12

3.Задача. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда по трём его измерениям, равным 4 см, 7 см, 6 см.

4.Задача. Классные помещения должны быть рассчитаны так, чтобы на одного учащегося приходилось не менее 6 м^3 воздуха. Можно ли в класс, имеющий вид прямоугольного параллелепипеда с измерениями 8,3 м х 6,25 м х 3,6 м вместить 30 человек, не нарушая санитарной нормы?

Вариант 3

1.Выберите неверное утверждение:

а) объем куба равен кубу его ребра;

б) объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту;

в) если тело составлено из нескольких тел, имеющих общие внутренние точки, то его объем равен сумме объемов этих тел;

2. Сколько ребер у прямоугольного параллелепипеда ?

а) 8, б) 6, в) 12.

3.Задача. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда по трём его измерениям, равным 4 см, 3см, 8 см

4.Задача. Строительный кирпич имеет размеры 25 см х 12 см х 6 см. Найдите объем стены, выложенной из 1000 кирпичей. Учтите, что раствор увеличивает объем на 15%

Самостоятельная работа № 15

По теме: « Объем пирамиды.»

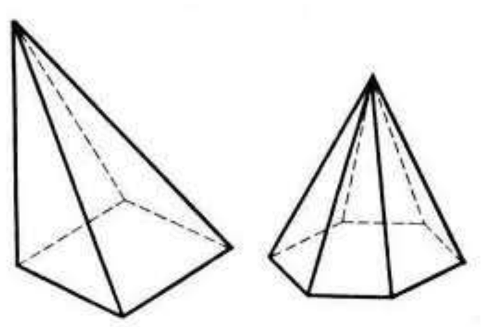
Цели: закрепление понятий: пирамида, объем; способствовать развитию математического мышления и речи, памяти, формировать умения анализировать, сравнивать, оценивать, систематизировать.

Оборудование: модели пирамид, таблица с формулами, линейки, карандаши, калькулятор.

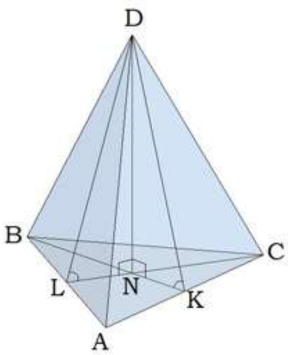
Методические указания.

Пирами́да — многогранник, основание которого — многоугольник, а остальные грани — треугольники, имеющие общую вершину. По числу углов основания различают пирамиды треугольные, четырёхугольные и т. д.

наклонная   **прямая**



Элементы пирамиды.



Д –вершина пирамиды

ДВ, ДС, ДА - боковые ребра граней;

ДВА, ДАС, ДВС - боковые грани

ДК, ДL - апофема

ДN- высота пирамиды.

апофема — высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины [ℓ];

боковые грани — треугольники, сходящиеся в вершине пирамиды;

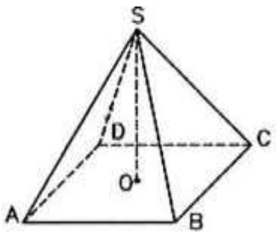
боковые ребра — общие стороны боковых граней;

вершина пирамиды — точка, соединяющая боковые рёбра и не лежащая в плоскости основания;

высота — отрезок перпендикуляра, проведённого через вершину пирамиды к плоскости её основания (концами этого отрезка являются вершина пирамиды и основание перпендикуляра) (Н);

диагональное сечение пирамиды — сечение пирамиды, проходящее через вершину и диагональ основания;

основание — многоугольник, которому не принадлежит вершина пирамиды.



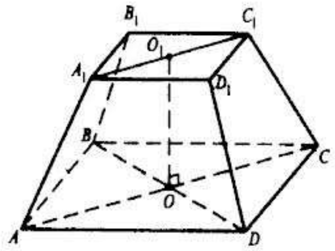
Правильная пирамида

Пирамида называется правильной, если основанием её является правильный многоугольник, а вершина проецируется в центр основания. Тогда она обладает такими свойствами:

боковые ребра правильной пирамиды равны; в правильной пирамиде все боковые грани — равные равнобедренные треугольники; в любую правильную пирамиду можно как вписать, так и описать около неё сферу;

Пирамида называется прямоугольной, если одно из боковых рёбер пирамиды перпендикулярно основанию. В данном случае, это ребро и является высотой пирамиды.

Усечённая пирамида



Усечённой пирамидой называется многогранник, заключённый между основанием пирамиды и секущей плоскостью, параллельной её основанию.

Объем пирамиды (любой) может быть вычислен по формул: **V = 1/3•$S_{осн.}$•H**

Объем усеченной пирамиды пирамиды $V = \frac{1}{3}h(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$, где S_1, S_2 — площади оснований, h — высота усечённой пирамиды.

Плотность находится по формуле: $\rho = \frac{m}{V}$,

где ***m*** — масса тела***, V*** — его объём;

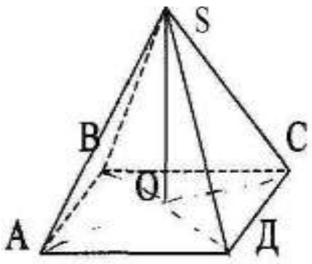
Задание к практической работе: по данным вам моделям вычислить объем пирамиды

Пример: Найти объем пирамиды.

<u>Ход работы</u>

1. Для нахождения объема нужно знать высоту пирамиды и площадь основания.

Оформление работы:



Дано: SABCД – пирамида, AB=3см, BC= 6см, пирамида неправильная, H=10см,

Найти: V

Решение:

$V = 1/3 \cdot S_{осн.} \cdot H$

$S_{осн.} = AB \cdot BC = 3 \cdot 6 = 18(см^2)$,

$V = 1/3 \cdot S_{осн} \cdot H = 1/3 \cdot 18 \cdot 10 = 60(см^3)$ – формула объема справедлива для любой пирамиды.

2. Выполняют тесты, состоящие из одного вопроса и двух задач.

Задания для самостоятельной работы:

1 вариант.

1**. Выберите верное утверждение** :

а) объём пирамиды равен произведению одной трети площади основания на высоту ;

б) боковая грань пирамиды - квадрат;

в) высота пирамиды, это перпендикуляр, проведённый из вершины к стороне основания;

2.Задача. Масса чугунной пирамиды с квадратным основанием равна 540 г, высота равна 6 см. Вычислите длину стороны основания. Плотность чугуна 7,5 г/см^3.

3. Задача .Кузов тракторного прицепа имеет размеры: вверху 3,5 м х 2,6 м, понизу 2,9 м х 1,1 м. Найдите вместимость, если высота прицепа 1,2 м.

2 вариант.

1. **Выберите верное утверждение :**

а) высота пирамиды, это перпендикуляр, проведённый из вершины к основанию;

б) объём усечённой пирамиды , высота которой равна h , а площади оснований равны S и M, вычисляется по формуле $V = h/3(S + M + \sqrt{S} + M)$;

в) пирамида называется правильной, если ее основание прямоугольник;

2.Задача. Щебень укладывается в кучу, имеющую форму правильной пирамиды с длиной основания 3 м. Какой высоты должна быть куча, чтобы ее объем был 8м$^{3.}$

3.Задача. Бункер, у которого дно и верх прямоугольники, размеры которых равны 2*2,5 и 2,8* 3.5 м и высотой 1,5м заполнен зерном. Вычислите массу зерна, если масса одного кубического метра зерна равна 500 кг.

3 вариант.

1. **Выберите верное утверждение :**

а) апофема – это высота пирамиды;

б) объём пирамиды равен $V = 1/3 \cdot S_{осн.} \cdot H$

в) все грани треугольной пирамиды прямоугольными треугольниками;

2.Задача .Какой объем может войти в тетра пак в виде пирамиды, основание которой равносторонний треугольник со стороной 20 см, высотой 24 см.

3. Задача. Одно из самых грандиозных сооружений древности – пирамида Хеопса – имеет форму правильной четырехугольной пирамиды с высотой 150 м и боковым ребром 220 м. Найдите объем пирамиды.

Самостоятельная работа № 16.

По теме: « Объем цилиндра »

Цели: закрепление понятий: цилиндр, объем цилиндра; способствовать развитию математического мышления и речи, закрепить формулу объема в процессе решения задач.

Оборудование: модели цилиндра, тесты, калькулятор, линейки, карандаши.

Методические указания.

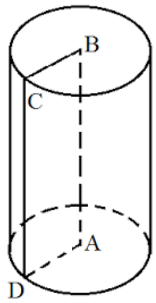
Цили́ндр — геометрическое тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя параллельными плоскостями, пересекающими её

Круги, лежащие в параллельных плоскостях, называются основаниями цилиндра, а отрезки, соединяющие соответствующие точки оснований, - образующими цилиндра.

Поверхность, состоящая из образующих, называется боковой поверхностью цилиндра.

Цилиндр прямой круговой может быть получен путем вращения прямоугольника вдоль стороны как оси.

Элементы цилиндра.



R= АД – радиус цилиндра; **D** – диаметр.

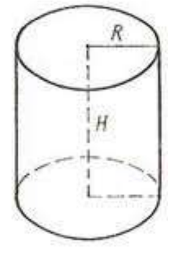
H = AB – высота;

L =СД – образующая.

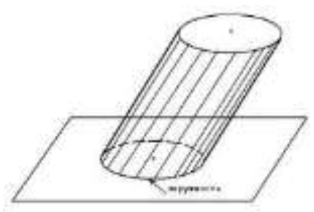
$\mathbf{S = \pi R^2}$ - площадь круга. **D = 2R.**

C – длина окружности**.** $\mathbf{C = 2\pi R}$

Виды цилиндров:

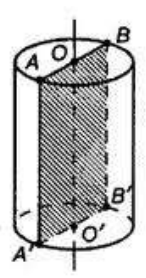


прямой

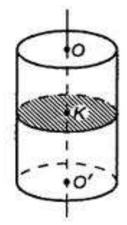


наклонный

Сечения цилиндра:



осевое сечение



сечение плоскостью

перпендикулярной оси

Плотность находится по формуле: $\rho = \dfrac{m}{V},$ где ***m*** — масса тела***, V*** — его объём;

Объем цилиндра вычисляется по формуле: $V = \pi R^2 H$

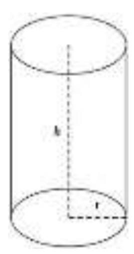
1.Задание: по данным вам моделям найти объем цилиндра.

Ход работы:

Для нахождения объема цилиндра нужно измерить линейкой следующие элементы: диаметр, высоту. Подставить значения в формулу для нахождения объема цилиндра.

Пример: Вычислить объем цилиндра.

Оформление работы:

	**Дано**: цилиндр, H=12см, R=3см **Найти:** V **Решение:** $V = \pi R^2 \cdot H = \pi \cdot 3^2 \cdot 12 = 108\pi$ (см^3)

2.Выполняют тесты, состоящие из одного вопроса и двух задач.

Задания для самостоятельной работы:

1вариант

1. Выберите верное утверждение.

а) Объём цилиндра равен половине произведения площади основания на высоту;

б) Объём цилиндра вычисляется по формуле $V = \pi S/2$, где S – площадь осевого сечения цилиндра;

в) длина окружности равна $\mathbf{C = 2\pi D}$

2.Задача.Сколько тонн бензина можно хранить в цистерне цилиндрической формы, если ее диаметр 5 м, длина3 м.? плотность бензина 0,7г\см.

3.Задача.Сколько литров побелки надо налить в емкость для краскопульта диаметром 20 см и высотой 60 см.

2 вариант.

1.Выберите неверное утверждение:

а) объём равностороннего цилиндра равен $V = 2\pi R^3$, где R – радиус основания цилиндра;
б) объём цилиндра равен**:** $V = \pi R^2 H$

в) длина образующей цилиндра называется диаметром цилиндра;

2.Задача. Сколько бочек высотой 1,5 м и диаметром 0,8 м нужно, чтобы разлить в них содержимое цистерны длиной 4,5 м и диаметром 1,6 м?

3.Задача. 25 м медной проволоки имеют массу 100,7 г. Найдите диаметр проволоки, если плотность меди 8,9 г/см^3.

3 вариант.

1.**Выберите неверное утверждение:**

а)объём цилиндра вычисляется по формуле $V = Mh/2$, где M – площадь боковой поверхности цилиндра, а h – его высота;

б) длина окружности равна $C = 2\pi R$,

в)площадь круга равна $S = \pi R^2$.

2. Задача. Сколько весит километр железной телеграфной проволоки толщиной 4 мм, если известно, что 1 кубический сантиметр железа весит 8 г?

3.Задача. Сколько в связке электродов для электросварки, если их общая масса 10 кг, а каждый электрод – кусок стальной проволоки длиной 45 см и диаметром 6 мм? Плотность стали 7600 кг/м^3.

Самостоятельная работа № 17

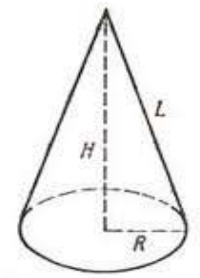
По теме:» Объем конуса.»

Цели:закрепить понятия: конус, объем конуса; активизировать познавательный интерес к предмету; воспитывать настойчивость и упорство в достижение цели. ;

Оборудование: модели конуса, плакат с формулами, линейки, карандаши, калькулятор.

Методические указания.

Конусом называется тело, которое состоит из круга - основание конуса, точки, не лежащей в плоскости этого круга - вершины конуса, и всех отрезков, соединяющих вершину конуса с точками основания.



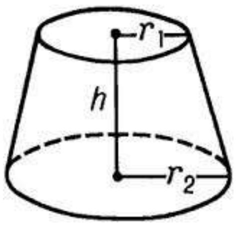
Отрезок, соединяющий вершину и границу основания, называется **образующей конуса (ℓ).**

Отрезок, опущенный перпендикулярно из вершины на плоскость основания (а также длина такого отрезка), называется **высотой конуса (H).**

R – радиус основания.

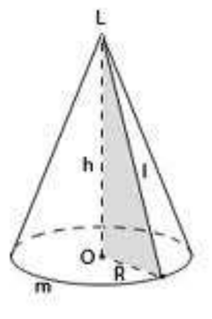
Круговой конус — конус, основание которого является кругом.

Прямой круговой конус (часто его называют просто конусом) можно получить вращением прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей катет (эта прямая представляет собой ось конуса). Часть конуса, лежащая между основанием и плоскостью, параллельной основанию и находящейся между вершиной и основанием, называется **усечённым конусом**, или коническим слоем.



$$V = \frac{1}{3}\pi H\left(R^2 + Rr + r^2\right)$$

Прямой круговой конус (часто его называют просто конусом) можно получить вращением прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей катет (эта прямая представляет собой ось конуса).



Объем кругового конуса: **V=1/3πR^2•H**

Плотность находится по формуле: $\rho = \frac{m}{V}$, где m — масса тела, V — его объём;

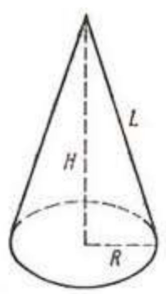
Задание: по данным вам моделям найти объем конуса.

<u>Ход работы</u>:

1.Для нахождения объема нужно знать высоту цилиндра и площадь основания.

Пример: Найти объем конуса

Оформление работы:



Дано: конус, H=10см, R=6см, ℓ= 11,6см

Найти:. V

Решение: $V = 1/3\pi R^2 \cdot H = 1/3 \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 10 = 120\pi$ (см^3)

2. Выполняют тесты, состоящие из одного вопроса и двух задач.

Задания для самостоятельной работы:

1 вариант

1. Выберите верное утверждение.

а) конус может быть получен в результате вращения прямоугольного треугольника вокруг гипотенузы;

б) объем конуса вычисляется по формуле $V=1/3\pi R^2 \cdot H$;

в) осевым сечением усеченного конуса является прямоугольник.

2.**Задача.** На учебное хозяйство привезли машину пшеницы и ссыпали в кучу. Куча имеет коническую форму с диаметром 324 см и высотой 112см. Найдите объём кучи.

3.**Задача.** Вычислить вместимость ведра, имеющего форму усеченного конуса, если диаметр дна равен 18 см, диаметр отверстия 35 см, а глубина 38,5 см.

2 вариант.

1.Выберите верное утверждение:

а) объем конуса вычисляется по формуле V=1/3 π S? , где S- площадь осевого сечения.

б) конус называется равносторонним, если его осевое сечение – правильный треугольник.

в) сечение конуса, проходящее через ось, есть круг.

2.Задача. Коническая куча зерна имеет высоту 2,4 м, а окружность основания 20 м. Сколько тонн зерна в куче, если масса 1 м^3 зерна равна 750 кг?

3.**Задача.** Сосуд имеет вид усеченного конуса, высота которого 27 см и длины окружностей оснований равны 66 см и 96 см. Сколько литров вмещает сосуд?

3 вариант.

1.Выберите неверное утверждение:

а) конус может быть получен в результате вращения прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов;

б) прямая, проходящая через вершину конуса и центр его основания, называется осью конуса;

в) объем конуса вычисляется по формуле V=1/3 MR, где M –площадь боковой поверхности конуса.

2.Задача. Отсортированное зерно собрали в коническую кучу, высота которой 0,7 м. Какова масса зерна, если образующая конуса имеет естественный уклон 45^0. Плотность зерна в куче 700кг/м^3.

3.Задача. Какую высоту должно иметь жестяное ведро в форме усеченного конуса вместимостью 15 л, если диаметры его оснований должны иметь длину 2,4 и 3 дм?

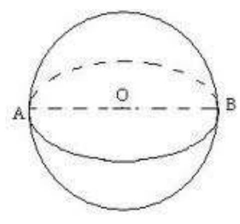
Самостоятельная работа № 18.

По теме: « Объем шара.»

Цели: закрепление понятий: шар, объем шара; способствовать развитию математического мышления, -обеспечить условия для формирования положительного отношения к знаниям, к процессу учения.

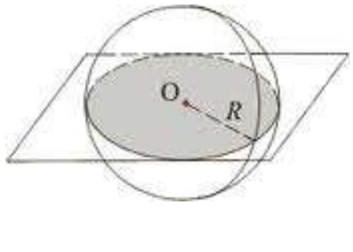
Оборудование: модели шара (клубки), плакат с формулами объема шара, линейки, карандаши, калькулятор.

Методические указания.



Шар - это тело, ограниченное сферической поверхностью. Можно получить шар, вращая полукруг (или круг) вокруг диаметра.

Сечения шара



Наибольший круг лежит в сечении, проходящем через центр шара, и называется большим кругом. Его радиус равен радиусу шара.

Все плоские сечения шара – круги.

V = 4/3πR³ – объем шара.

C=2πR - длина окружности.

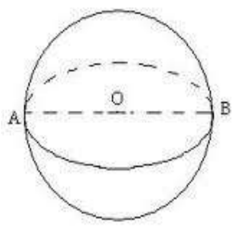
Плотность находится по формуле: $\rho = \dfrac{m}{V}$, где m — масса тела, V — его объём

Задание: по данным вам моделям найти объем шара.

Ход работы:

1.Для нахождения объема шара нужно нитью клубка измерить «экватор», т.е длину окружности большого круга. Выразить из формулы длины окружности радиус и подставить в формулу объема шара.

Пример:

	**Дано**: шар, C= 15см. **Найти:** , V **Решение:** длина окружности вычисляется по формуле: $C = 2\pi R$, отсюда найдем $R = C/2\pi = 15/2 \cdot 3{,}14 = 2{,}39$см $V = 4/3\pi R^3 = 4/3\pi \cdot 2{,}39^3 = 18\pi$ (см^3)

2. Выполняют тесты, состоящие из одного вопроса и двух задач.

Задания для самостоятельной работы:

Вариант 1.

1.Выберите верное утверждение.

а) Если точка удалена от центра шара на расстояние, больше радиуса шара, то она не принадлежит шару.

б) Шар - тело ограниченное многогранником.

в) Всякое сечение шара плоскостью есть окружность.

2.**Задача**. Диаметр свинцового шара равен 30см. Сколько шариков, диаметром 3см, можно сделать из этого свинца?

3.**Задача**.Сколько дробинок диаметром 3,0 мм содержится в 1,0 кг свинцовой дроби? (Плотность свинца равна 11,4 г/см^3).

2 вариант.

1.Выберите верное утверждение.

а)Шар может быть получен в результате вращения полуокружности вокруг диаметра.

б) Тело, ограниченное сферой, называется шаром.

в) Всякое сечение шара есть круг.

2 Задача. Два свинцовых шара диаметром 23см и 34 см переплавили в один шар. Найдите его диаметр.

3.**Задача**. Масса железного шара равна 4 кг. Каков его диаметр? Плотность железа рвана 7,8 г/см^3).

3 вариант.

1.Выберите верное утверждение.

а)Шар – тело, ограниченное сферой .

б)Всякое сечение шара плоскостью есть окружность.

в)Радиус любого сечения шара плоскостью не больше радиуса шара.

2.**Задача**. Масса железного шара равна 4 кг. Каков его диаметр? Плотность железа равна 7,8 г/см^3).

3.**Задача**.Чтобы отлить свинцовый шар диаметром 3 см, используют свинцовые шарики диаметром 5 мм. Сколько таких шариков нужно взять?

Самостоятельная работа № 19 по теме «Параллельное проектирование»

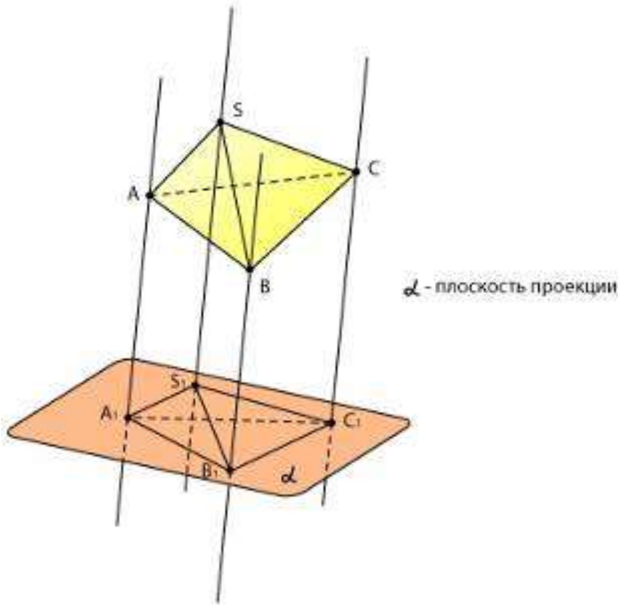
Цель: научиться выполнять параллельное проектировании и вычислять площадь проекции фигуры.

Параллельное проецирование. Площадь проекции фигуры

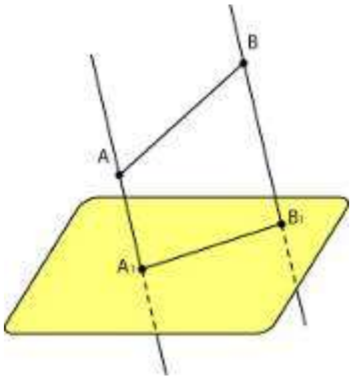
В задачах по геометрии успех зависит не только от знания теории, но от качественного чертежа. С плоскими чертежами все более-менее понятно. А в стереометрии дело обстоит сложнее. Ведь изобразить надо **трехмерное** тело на **плоском** чертеже, причем так, чтобы и вы сами, и тот, кто смотрит на ваш чертеж, увидели бы то же самое объемное тело.

Как это сделать? Конечно, любое изображение объемного тела на плоскости будет условным. Однако существует определенный набор правил. Существует общепринятый способ построения чертежей — **параллельное проецирование**.

Возьмем объемное тело. Выберем **плоскость проекции**. Через каждую точку объемного тела проведем прямые, параллельные друг другу и пересекающие плоскость проекции под каким-либо углом. Каждая из этих прямых пересекает плоскость проекции в какой-либо точке. А все вместе эти точки образуют **проекцию** объемного тела на плоскость, то есть его плоское изображение.

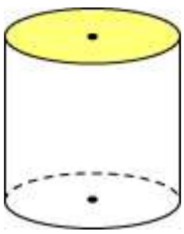


Как строить проекции объемных тел? Представьте, что у вас есть каркас объемного тела — призмы, пирамиды или цилиндра. Освещая его параллельным пучком света, получаем изображение — тень на стене или на экране. Заметим, что в разных ракурсах получаются разные изображения, но некоторые закономерности все же присутствуют: Проекцией отрезка будет отрезок.

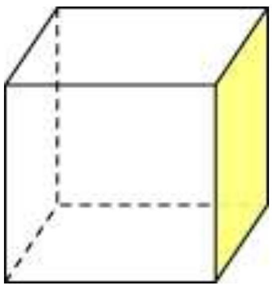


Конечно, если отрезок перпендикулярен плоскости проекции — он отобразится в одну точку.

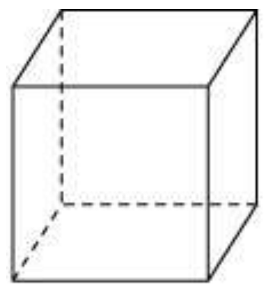
Проекцией круга в общем случае окажется эллипс.



Проекцией прямоугольника — параллелограмм.

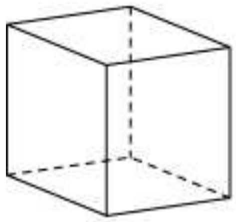


Вот как выглядит проекция куба на плоскость:



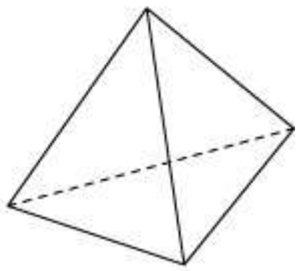
Здесь передняя и задняя грани параллельны плоскости проекции

Можно сделать по-другому:

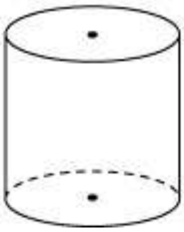


Какой бы ракурс мы ни выбрали, **проекциями параллельных отрезков на чертеже тоже будут параллельные отрезки**. Это один из принципов параллельного проецирования.

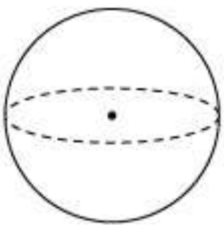
Рисуем проекции пирамиды,



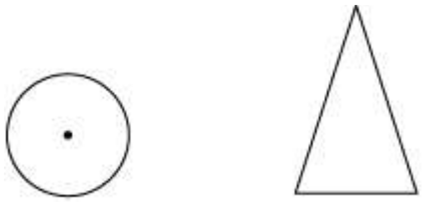
цилиндра:



и шара:



Еще раз повторим основной принцип параллельного проецирования. Выбираем плоскость проекции и через каждую точку объемного тела проводим параллельные друг другу прямые. Эти прямые пересекают плоскость проекции под каким-либо углом. Если этот угол равен 90° — речь идет о **прямоугольном проецировании**. С помощью прямоугольного проецирования строятся чертежи объемных деталей в технике. В этом случае мы говорим о виде сверху, виде спереди и виде сбоку.

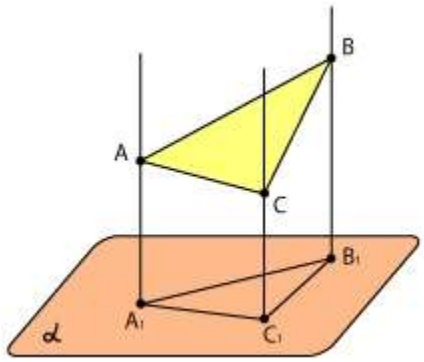


конус
вид сверху

конус
вид сбоку

Иногда в задачах требуется найти **площадь прямоугольной проекции** фигуры.

Пусть S — площадь фигуры. Тогда площадь ее прямоугольной проекции равна S cosφ, где φ — угол между плоскостью фигуры и плоскостью проекции.



$$S_{A_1B_1C_1} = S_{ABC} \cdot \cos\varphi,$$

где φ - угол между плоскостями (ABC) и α

ЗАДАНИЕ

1. Дана параллельная проекция треугольника. Построить проекции медиан этого треугольника.
2. Дана параллельная проекция треугольника. Построить проекции средней линии.
3. Докажите, что параллельная проекция центрально-симметричной фигуры также является центрально-симметричная фигура.
4. Дана параллельная проекция окружности и диаметра. Построить проекцию перпендикулярного диаметра.
5. Дан равносторонний треугольник со стороной 4 см. Найдите площадь его ортогональной проекции на плоскость, которая образует с плоскостью треугольника угол:

   30°; 2) 45°; 3) 60°

Самостоятельная работа № 20 «Решение комбинаторных задач»

Цель отработать навыки решения комбинаторных задач

Комбинаторика - наука о комбинациях, состоящих из объектов одной и той же природы, различающихся способами (перестановки, сочетания, размещения).

1. Число перестановок.

Рассмотрим следующую задачу: имеется n последовательно расположенных неодинаковых элементов. Требуется найти количество способов, которыми их можно переставить (восклицательным знаком обозначается факториал).

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

Пример 1.

Сколькими способами можно переставить 5 различных книг на книжной полке?
5!=1·2·3·4·5=120

Пример 2
Сколько различных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, если ни одна из цифр не будет повторяться?
Решение:
Всего цифр четыре. Если бы среди заданных цифр не было нуля, задача решалась бы аналогично предыдущей:
4!=1·2·3·4=24 различных числа.
Но на первом месте не может стоять ноль. Таких вариантов 3! = 6 (0123, 0132, 0213, 0231, 0312, 0321). Поэтому количество чисел: 4!-3! = 24-6 = 182.

2. Число сочетаний

Имеется n различных (неодинаковых, неповторяющихся) элементов. Требуется выбрать из них m элементов, безразлично, в каком порядке.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Пример 1
В лотерее нужно зачеркнуть любые 8 чисел из 40. Сколькими способами это можно сделать?
Решение:
Элементы не повторяются, порядок расположения элементов не важен.
40!/[8!32!] = (1·2·3·...·40)/(8!·1·2·3·...·32) = (33·34·...·40)/8! = 3100796899200/40320 = 76904685
Число сочетаний используется в формуле **бинома Ньютона** для определения биномиальных коэффициентов. В школе каждый заучивал формулы квадрата и куба суммы двух чисел:
(a+b)2=a2+2ab+b2
(a+b)3=a3+2a2b+2ab2+b3

Для произвольной степени формула выглядит так:

- $$(a+b)^n = C_n^n a^n + C_n^{n-1} a^{n-1} b + C_n^{n-2} a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^2 a^2 b^{n-2} + C_n^1 a b^{n-1} + C_n^0 b^n$$

Как мы видим, коэффициенты относительно краев выражения симметричны:
Cnn=Cn0=1, Cn-1n=C1n=n, Cnn-2=Cn2=n(n-1)/2!, Cnn-3=Cn3=n(n-1)(n-2)/3!, и т.д.

3. Число размещений

Так же, как и в предыдущем примере, имеется n различных элементов. Нужно выбрать из них m элементов, причем порядок расположения элементов важен!

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Пример 1

Человек забыл две последние цифры в шестизначном телефонном номере, помнит только, что они были неодинаковые и нечетные. Сколько таких телефонных номеров может быть?
Решение:
Нечетных цифр всего пять: 1, 3, 5, 7, 9. Цифры по условию задачи не повторяются. Порядок расположения элементов важен.
5!/3! = 120/6 = 20

Выполнить тест

Вариант 1.

1.Сколькими способами можно расставить четыре различных книги на книжной полке?

А. 24. Б. 4. В. 16. Г. 20.

2. Сколько диагоналей имеет выпуклый семиугольник?

А. 30. Б. 21. В. 14. Г. 7.

3. В футбольной команде 11 человек. Необходимо выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

А. 22. Б. 11. В. 150. Г. 110.

4. Какова вероятность, что при одном броске игрального кубика выпадет чётное число очков?

А. 1/6. Б. 0,5. В. 1/3 . Г. 0,25

5. Вычислите: 6! - 5!

А. 1. Б. 300. В. 600. Г. 1000.

6. Катя и Аня пишут диктант. Вероятность того, что Катя допустит ошибку составляет 50 %, а вероятность ошибки у Ани составляет 40 %. Найдите обе девочки напишут диктант без ошибки.

А. 0,1. Б. 0,2. В. 0,3. Г. 0,9.

7. 15 % продукции завода -высшего сорта, 25 % - первого сорта, 40 % - второго сорта, а всё остальное - брак. Найдите вероятность, того, что выбранное изделие не будет бракованным.

А. 0,8. Б. 0,1. В. 0,015 Г. 0,35.

Вариант 2.

1. Сколькими различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,5?

А. 100. Б. 30. В. 5. Г. 120.

2. Имеются помидоры, огурцы и лук. Сколько различных салатов можно приготовить, если в каждый салат должно входить два различных вида овощей?

А. 3. Б. 6. В. 2. Г. 1.

3. Сколькими способами из 8 учебных предметов можно составить расписание учебного дня из четырёх различных уроков

А. 24. Б. 1680. В. 20170. Г. 40340.

4. Вычислите: 8! / 6!

А. 2. Б. 56. В. 30. Г. 4/3

5. В игральной колоде 36 карт. Наугад выбирается одна карта. Какова вероятность, что эта карта-туз?

А. 1/36. Б. 1/35 В. 1/9. Г. 1/32

6. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность ,что выпадут две чётные цифры?

А.0,25. Б. 2/6. В. 0,5. Г. 0,125.

7. В корзине лежат грибы, среди которых 10% белых и 50% сыроежек. Какова вероятность, того, что выбранный гриб белый или сыроежка?

А. 0,6. Б. 0,4. В. 0,05. Г. 0,45.

Самостоятельная работа № 21 « Вектора».

Цель применить изученный материал в новой ситуации

Вектор - это величина, определяемая не только численным значением, но и направлением в пространстве, например сила $\vec{F}$, скорость $\vec{\upsilon}$, ускорение $\vec{a}$ и т.д.

Скаляр - это величина, определяемая только численным значением, например время t, масса m, путь l.

Действия с векторами

Сложение векторов

а) векторы направлены в одну сторону:

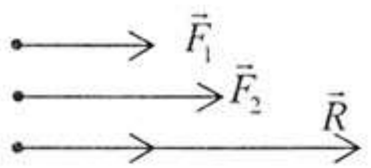


Рис. 1

б) векторы направлены в противоположные стороны:

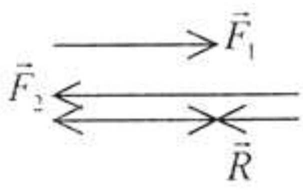


Рис. 2

в) векторы направлены под углом друг к другу:

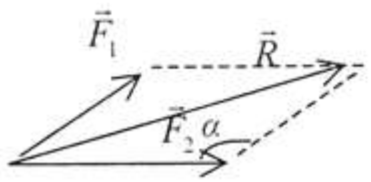


Рис. 3

Сложение осуществляется по правилу параллелограмма или треугольника.

В векторном виде результирующий вектор:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

в скалярном виде:

$$R = F_1 + F_2$$

в векторном виде:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

в скалярном виде:

$$R = F_2 - F_1$$

В векторном виде результирующий вектор:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

В скалярном виде для нахождения R необходимо воспользоваться теоремой косинусов.

Теорема косинусов:

квадрат стороны, лежащей против тупого угла, равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла, между ними.

$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2cos\alpha$

где α — тупой угол между вектором $\vec{F_1}$ и перенесенным в конец вектора $\vec{F_1}$ вектором $\vec{F_2}$

В случае, если угол α = 90°, cosα = 0 и теорема косинусов превращается в теорему Пифагора:

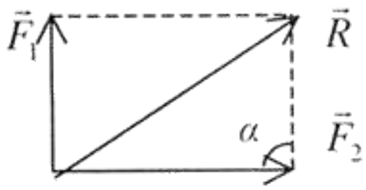


Рис. 4.

Теорема Пифагора:

квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов:

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2$$

Разложение вектора на составляющие

Осуществляется по правилу параллелограмма, в котором разлагаемый вектор является диагональю, а результирующие векторы - сторонами:

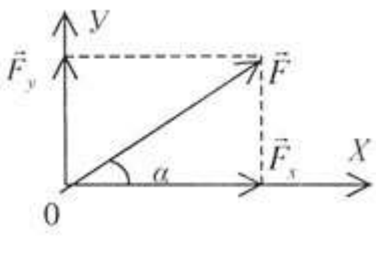


Рис. 5

Разложение вектора $\vec{F}$ на составляющие по координатным осям X и У дает два вектора: $\vec{F_x}$ и $\vec{F_y}$, модули которых:

Fx = Fcosa;

Fy = Fsina.

Проекции векторов на оси

Проекции векторов на оси всегда скаляры:

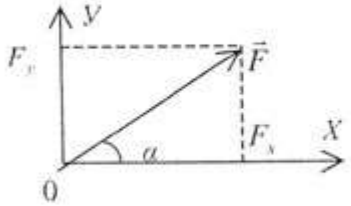


Рис. 6

Fx = Fcosa;

Fy = Fsina.

Если направление вектора совпадает с направлением оси, проекция положительна, если нет - отрицательна.

- Для двух коллинеарных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ всегда имеет место соотношение: $\bar{a} = k\bar{b}$, где k - некоторое ненулевое число.
- Если ввести в рассмотрение единичный вектор (или орт) $\bar{a}_0$, длина которого равна единице: $|\bar{a}_0| = 1$ и который коллинеарен вектору $\bar{a}$, то последний можно представить в виде: $\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \bar{a}_0$
- Произвольный вектор $\bar{c}$ можно представить в виде: $\bar{c} = m\bar{a} + n\bar{b}$, где m, n - произвольные числа, а тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ компланарна (рис. 1).

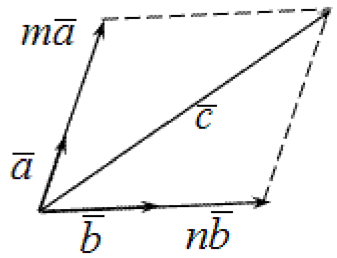


Рис. 1

Определение
Представление $\bar{c} = m\bar{a} + n\bar{b}$ называется разложением вектора $\bar{c}$ по компонентам $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не коллинеарны, то приведенное представление единственно.
Для трех попарно неколлинеарных векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ и произвольного вектора $\bar{d}$ существует единственное разложение: $\bar{d} = m\bar{a} + n\bar{b} + p\bar{c}$
Задание.
Зная разложение $\bar{a}$ по базисной системе векторов: $\bar{a} = 3\bar{i} - \bar{k}$, записать координаты этого вектора в пространстве.
Решение. Коэффициенты при ортах и есть координатами вектора, поэтому из того, что $\bar{a} = 3\bar{i} - 0 \cdot \bar{j} - \bar{k}$, получаем, что $\bar{a} = (3; 0; -1)$.
Задание. Вектор задан своими координатами: $\bar{a} = (2; -1; 5)$. Записать разложение данного вектора по ортам осей координат.

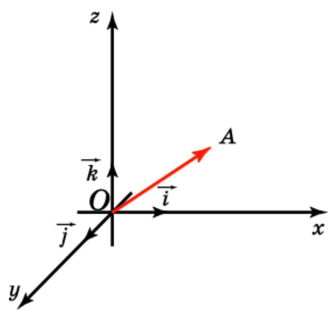
Решение. Координаты вектора - это коэффициенты при ортах координатных осей в разложении вектора по базисной системе, поэтому искомое разложение:
$\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} + 5\bar{k}$

Самостоятельная работа № 22
«Действия над векторами, с заданными координатами».

Цель: Знать правила действия над векторами и уметь их применять при вычислениях.

Теоретический материал

Отложим вектор так, чтобы его начало совпало с началом координат. Тогда координаты его конца называются координатами вектора. Обозначим $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ векторы с координатами (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) соответственно. Их длины равны единице, а направления совпадают с направлениями соответствующих осей координат. Будем изображать эти векторы, отложенными от начала координат и называть их координатными векторами.



- Теорема. Вектор $\vec{a}$ имеет координаты (*x*, *y*, *z*) тогда и только тогда, когда он представим в виде $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
- **Вариант 1**

№п/п	**Название операции**	**Формулы**
1	Найти сумму векторов	$\vec{a}\{1; -2; 3\}, \quad \vec{b}\{4; 0; -1\}$ $\vec{a} + \vec{b}\{x_1 + x_2 \,;\, y_1 + y_2 \,;\, z_1 + z_2\}$
2	Найти разность векторов	$\vec{a}\{4; 1; -3\}, \quad \vec{b}\{0; -5; 2\}$ $\vec{a} - \vec{b}\{x_1 - x_2 \,;\, y_1 - y_2 \,;\, z_1 - z_2\}$
3	Найти произведение вектора на число	$\vec{a}\{-1; 3; 1\}, \quad \delta - \text{число} \quad \delta = -3$ $\delta\vec{a}\{\delta \cdot x;\ \delta y \,;\, \delta z\}$

4	Вычислить координаты середины отрезка	Точка А$(1;2;-3)$ Точка В (-3;4;-1) Точка С-середина отрезка АВ. С$(x_c;y_c;z_c)$ $x_c=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y_c=\frac{y_1+y_2}{2}$, $z_c=\frac{z_1+z_2}{2}$
5	Найти координаты вектора	Точка А$(5;0;-3)$. Точка В (-1;4;-7).Находим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$. Из координат конца вычислить координаты начала вектора $\overrightarrow{AB}\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$
6	Найти длину вектора	$\vec{a}\{5;1;-1\}$ $\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
7	Вычислить скалярное произведение векторов	$\vec{a}\{-2;3;7\}$, $\vec{b}\{-9;0;2\}$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$
8	Найти косинус угла между векторами	$\vec{a}\{2;0;1\}$, $\vec{b}\{-3;1;2\}$ $\cos\alpha=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$
9	При каких значениях m и n векторы коллинеарны?	$\vec{a}\{m;3;1\}$, $\vec{b}\{1;n;2\}$ $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}=k$
10	Проверьте перпендикулярность векторов	$\vec{a}\{-4;0;1\}$, $\vec{b}\{2;7;8\}$

		$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0$ - условие перпендикулярности векторов

-
- **Вариант 2**

№п/п	Название операции	Формулы
1	Найти сумму векторов	$\vec{a}\{2;-3;4\}$, $\vec{b}\{-1;2;0\}$ $\vec{a}+\vec{b}\{x_1+x_2\,;\,y_1+y_2\,;\,z_1+z_2\}$
2	Найти разность векторов	$\vec{a}\{4;-5;7\}$, $\vec{b}\{3;-1;2\}$ $\vec{a}-\vec{b}\{x_1-x_2\,;\,y_1-y_2\,;\,z_1-z_2\}$
3	Найти пароизведение на число	$\vec{a}\{-2;4;0\}$, δ – число $\delta=-4$ $\delta\vec{a}\{\delta\cdot x;\ \delta y\,;\delta z\}$
4	Вычислить координаты середины отрезка	Точка А$(-3:1;2)$ Точка В (2;-3;1) Точка С- середина отрезка АВ. С$(x_c;\,y_c;\,z_c)$ $x_c=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y_c=\frac{y_1+y_2}{2}$, $z_c=\frac{z_1+z_2}{2}$
5	Найти координаты вектора	Точка А$(6;-3;4)$. Точка В (1;-4;7). Находим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$. Из координат конца вычислить координаты начала вектора $\overrightarrow{AB}\{x_2-x_1\,;y_2-y_1;\,z_2-z_1\}$
6	Найти длину вектора	$\vec{a}\{7;2;-1\}$

		$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
7	Вычислить скалярное произведение векторов	$\vec{a}\{-3; 2; 9\}$, $\vec{b}\{-7; 0; 3\}$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$
8	Найти косинус угла между векторами	$\vec{a}\{4; 1; 0\}$, $\vec{b}\{-5; 3; 1\}$ $\cos\alpha = \dfrac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$
9	При каких значениях m и n векторы коллинеарны?	$\vec{a}\{m; 5; 3\}$, $\vec{b}\{2; n; 4\}$ $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2} = k$
10	Проверьте перпендикулярность векторов	$\vec{a}\{0; -3; 2\}$, $\vec{b}\{9; 4; 6\}$ $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0$ - условие перпендикулярности векторов

Самостоятельная работа № 23

по теме «Производная. Применение производной»

Справочный материал по теме: «Производная и ее применение»

Основные определения

1. Производной от функции $y = f(x)$ по аргументу x называется предел отношения приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента, когда последнее стремиться к нулю, т.е. $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, где Δy – приращение функции, Δx – приращение аргумента

2. Геометрический смысл производной.

Число $f'(x) = tga = k$ – это угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0.

$y = y_0 + y'(x_0) \cdot (x - x_0)$ – уравнение касательной;

$y = y_0 - \dfrac{1}{y'(x_0)} \cdot (x - x_0)$ – уравнение нормали

3. Физический смысл производной:

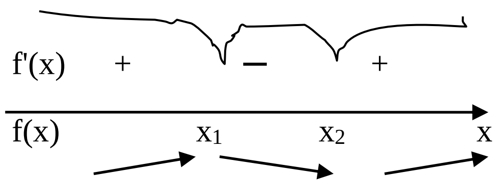
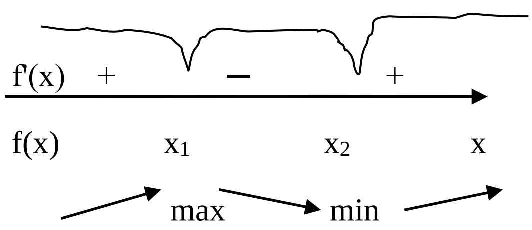
- Скорость в момент времени $t = t_0$ равен значению производной пути по времени: $v(t) = S'(t)$
- Ускорение в момент времени $t = t_0$ равно значению производной скорости по времени или второй производной пути по времени: $a(t) = v'(t) = S''(t)$

4. Таблица производных:

Таблица 2 – Правила производных

правила	$(cu)' = cu'$ $(u+v)' = u' + v'$ $(u \cdot v)' = u'v + uv'$ $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	элементарные	$x' = 1$ $(x^2)' = 2x$ $(x^3)' = 3x^2$ $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$ $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ $(e^x)' = e^x$ $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	общие	$c' = 0$ $(kx + c)' = k$ $(x^n)' = nx^{n-1}$ $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)' = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$ $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ $(a^x)' = a^x \ln x$

Таблица 3 – Применение производной к исследованию функции

№	Алгоритм действий	Оформление отчета
	I. Алгоритм отыскания интервалов монотонности функции:	
1	*2*	*3*
1.	Находим область определения функции	D(y) =…
2.	Находим производную функции (используя таблицу производных)	f'(x) = …
3.	Находим критические точки, (точки в которых производная равна нулю или не существует)	f '(x) = 0 ⇒ решаем уравнение x_1; x_2 – критические точки
4.	Разбиваем область определения функции критическими точками на интервалы, на каждом из которых находим знак производной: – если на интервале f' '(x) > 0, то на нем функция строго возрастает – если на интервале f '(x) < 0, то на нем функция строго убывает	
5.	Выписываем ответ	Ответ: $x \in [-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty] - f(x)\uparrow$ $x \in [x_1; x_2] - f(x)\downarrow$
	II. Алгоритм отыскания экстремумов функции:	
1.	Находим область определения функции	D(y) =…
2.	Находим производную функции (используя таблицу производных)	f'(x) =…
3.	Находим критические точки (точки в которых производная равна нулю или не существует)	f'(x)= 0 ⇒ решаем уравнение x_1; x_2 – критические точки
4.	Разбиваем область определения функции критическими точками на интервалы, на каждом из которых находим знак производно: – если f '(x) при переходе через критическую точку сменила знак, то функция в этой точке имеет экстремум	

	(max;min) – если знак f '(x) не меняется, то функция в этой точке экстремума не имеет (точка перегиба)	
5.	Находим значения функции в точках экстремума	f $(x_1) = y_1$; f $(x_2) = y_2$
6.	Выписываем ответ	Ответ: $(x_1; y_1)$- точка max; $(x_2; y_2)$-точки min

Продолжение таблицы 3

<table>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="3">III. Алгоритм исследования функции и построение графика с помощью производной:</td></tr>
<tr><td>1.</td><td>Находим область определения функции</td><td>D(y)=…</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Находим точки пересечения функции с осями:
– координата y, точки лежащей на оси (OX) равна нулю
– координата x, точки лежащей на оси (OY)равна нулю</td><td>(OX): $y=0 \Rightarrow$, $f(x)=0$ - решаем уравнение
x_1,x_2- корни $A_1(x_1;0), A_2(x_2;0)$
(OY): $x=0 \Rightarrow f(0)=b, A_3(0,b)$</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Находим производную функции (используя таблицу производных)</td><td>f '(x)=…</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Находим критические точки (точки в которых производная равна нулю или не существует)</td><td>$f'(x)=0 \Rightarrow$ решаем уравнение
x_1; x_2 – критические точки</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>Находим значения функции в точках экстремума</td><td>f $(x_1) = y_1$; f $(x_2) = y_2$</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>Заполняем таблицу</td><td><table>
<tr><td>x</td><td>$(-\infty; x_1)$</td><td>x_1</td><td>(x_1, x_2)</td><td>x_2</td><td>$(x_2;+\infty)$</td><td></td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>7.</td><td>Строим график</td><td></td></tr>
</table>

IV. Алгоритм написания уравнения касательной к графику функции в точке x_0:		
1.	Находим значение функции в точке x_0:	$f(x_0) = ...$
2.	Находим производные функции (используя таблицу производных)	$f'(x) = ...$

3.	Находим значение производной в точке x_0	$f'(x_0) = ...$
4.	Подставляем данные пунктов 1 и 3 в уравнение касательной	$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$
5.	Выписываем ответ	Ответ: $y = kx + b$
	VI.Алгоритм отыскания наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке [a; b]:	
1.	Находим область определения функции	D(y)=…
2.	Находим производную функции (используя таблицу производных)	f'(x)=…
3.	Находим критические точки, т.е. точки в которых производная равна нулю или не существует	f '(x)= 0 ⇒ решаем уравнение x_1; x_2 – критические точки
4.	Выбрать критические точки лежащие внутри отрезка [a; b]	$x_1 \in [a;b], x_2 \notin [a;b]$
5.	Находим значения функции в выбранных критических точках и на концах отрезка	f(a) = A – наибольшее значение f(x1) = Y – наименьшее значение f(b) = B
6.	Выписываем ответ	Ответ: $\max\limits_{[a;b]} f(a) = A \quad \min\limits_{[a;b]} f(x_1) = Y$

Самостоятельная работа № 23.1

Задание Нахождение производной функции по определению

Цель: отработать определение производной

вариант 1

1. f(x)= $4x+3$
2. f(x)= $5-2x$
3. f(x)= $\frac{1}{5}x-7$
4. f(x)= x^2-4
5. f(x)= $3x^2$

Вариант 2

1. f(x)= $6x+5$
2. f(x)= $8-3x$
3. f(x)= $\frac{2}{5}x-\frac{3}{7}$
4. f(x)= x^2-5
5. f(x)= $2x^2$

Вариант 3

1. f(x)= $5x+7$
2. f(x)= $2-9x$
3. f(x)= $\frac{1}{4}x-3$
4. f(x)= x^2-7
5. f(x)= $5x^2$

Вариант 4

1. f(x)= $5x+3$
2. f(x)= $5-x$
3. f(x)= $\frac{1}{5}x-2$
4. f(x)= $x^2-\frac{1}{2}$
5. f(x)= $4x^2$

Самостоятельная работа № 23.2

Задание

Нахождение производной, применяя формулы дифференцирования

Цель: отработать формулы дифференцирования;

Вариант 1

1. $(2x^3+3\sin x-\frac{8}{x}+5^x)'$
2. $(\frac{3}{x^4}-9\ln x-tgx)'$
3. $(6x^5+4\cos x-3)'$
4. $((5x^4-3)(\cos x+8))'$
5. $\left(\frac{4x-5}{3x+7}\right)'$

6. $\left(\dfrac{\sin x+2}{\sin x+5}\right)'$

7. $\left(\dfrac{9^x-4}{5-2x}\right)'$

Вариант 2

1. $\left(4\sqrt{x}+5\cos x-2\right)'$
2. $\left((9x-2)(x^7+4)\right)'$
3. $\left((\cos x+7)(\sin x-3)\right)'$
4. $\left(\dfrac{6-4x}{x+3}\right)'$
5. $\left(\dfrac{6e^x+9}{5}\right)'$
6. $\left(\dfrac{\sqrt{x}+5x}{4x}\right)'$
7. $\left(\dfrac{2\cos x-9}{4-\cos x}\right)'$

Самостоятельная работа № 23.3

Задание Исследование функции на монотонность

Цель: отработать формулы дифференцирования при исследовании функции (базовый уровень).

Задание: выполнить задания, используя схемы исследования функции.

Вариант 1

Найдите критические точки функции:

а) $f(x) = 4x + 3$;

б) $f(x) = x^2 – 3x – 3$;

Найдите промежутки возрастания и убывания функции и определите ее точки экстремума:

а) $f(x) = 4x + 1$;

б) $f(x) = x^2 – 3x + 2$;

Найдите экстремумы функции $f(x) = x^2(x + 1)$;

Вариант 2

1. Найдите критические точки функции:

а) $f(x) = 3x + 5$;

б) $f(x) = x^2 – 5x – 1$;

2. Найдите промежутки возрастания и убывания функции и определите ее точки экстремума:

а) $f(x) = 3x + 6$;

б) $f(x) = x^2 – 5x + 5$;

3. Найдите экстремумы функции $f(x) = x^2(x - 3)$;

Самостоятельная работа № 24

По теме «Определение первообразной. Основное свойство первообразной. Правила нахождения первообразной»

Цели: закрепление понятий первообразной, способствовать развитию математического мышления, обеспечить условия для формирования навыков нахождения и применения первообразной.

Определение первообразной. *Функция F называется первообразной для функции f на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка*

$$F'(x) = f(x)$$

Основное свойство первообразной.

Задача интегрирования состоит в том, чтобы для заданной функции найти все ее первообразные. При решении этой задачи важную роль играет следующее утверждение:

Признак постоянства функции. *Если $F'(x) = 0$ на некотором промежутке I, то функция F — постоянная на этом промежутке.*

Все первообразные функции f можно записать с помощью одной формулы, которую называют *общим видом первообразных для функции* f. Справедлива следующая теорема (**основное свойство первообразных**):

Теорема. *Любая первообразная для функции f на промежутке I может быть записана в виде* **$F(x)+C$,** *где $F(x)$ — одна из первообразных для функции $f(x)$ на промежутке I, а C — произвольная постоянная.*

Основному свойству первообразной можно придать геометрический смысл: *графики любых двух первообразных для функции f получаются друг из друга параллельным переносом вдоль оси Оу (рис.).*

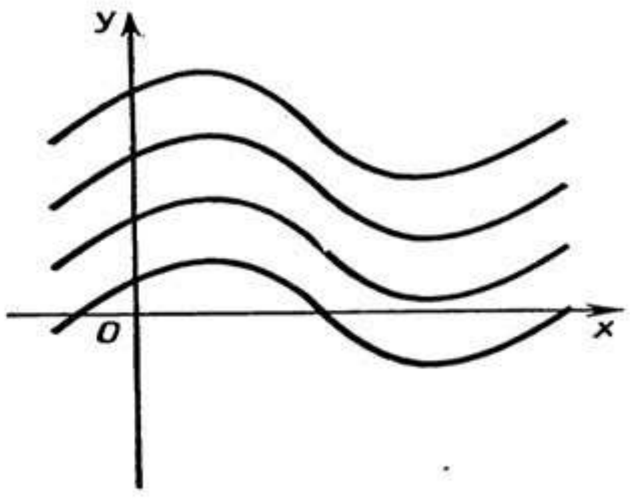


Таблица первообразных

Функция	Первообразные
a	$ax+C$
$x^p,\ p\neq -1$	$\frac{x^{p+1}}{p+1}+C$
$\frac{1}{x},\ x>0$	$\ln x+C$
$\frac{1}{x},\ x<0$	$\ln(-x)+C$
e^x	e^x+C

Функция	Первообразные
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+C$
$\sin x$	$-\cos x+C$
$\cos x$	$\sin x+C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x+C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x+C$

1. Правила нахождения первообразных.

Правило 1 *Если F есть первообразная для f, а G — первообразная для g, то F+G есть первообразная для f+g.*

(F+G)'=F'+G'=f+g

Правило 2.*Если F есть первообразная для f, а k — постоянная, то функция kF — первообразная для kf.*

(kF)'=kF'=kf.

Правило 3. *Если F (x) есть первообразная для f (x), а k и b — постоянные, причем k≠0, то* $\frac{1}{k}F(kx+b)$ *есть первообразная для f (kx+b).*

2. Площадь криволинейной трапеции.

Пусть на отрезке [a; b] оси Ох задана непрерывная функция f, не меняющая на нем знака. Фигуру, ограниченную графиком этой функции, отрезком [a; b] и прямыми x = a и x = b (рис. 1), называют **криволинейной трапецией**.

Различные примеры криволинейных трапеций приведены на рисунках 1, а - д.

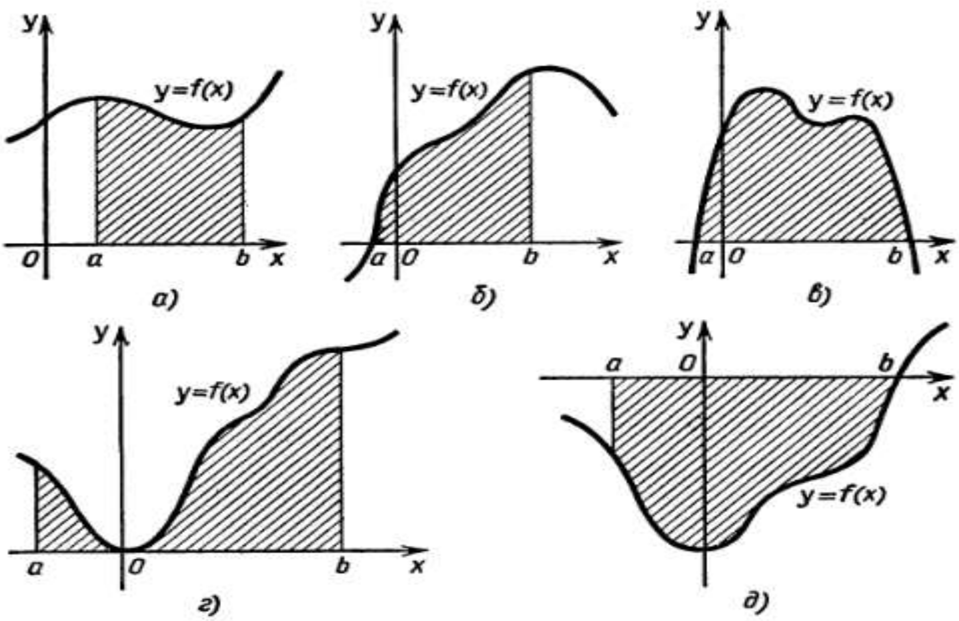


Рис. 1

Для вычисления площадей криволинейных трапеций применяется следующая теорема:

Теорема. *Если f — непрерывная и неотрицательная на отрезке [a; b] функция, а F — ее первообразная на этом отрезке, то площадь S соответствующей криволинейной трапеции) равна приращению первообразной на отрезке [a; b] т. е.*

$$S=F(b)-F(a).$$

3. Понятие об интеграле. Формула Ньютона - Лейбница

Рассмотрим другой подход к задаче вычисления площади криволинейной трапеции. Для простоты будем считать функцию f неотрицательной и непрерывной на отрезке [a; b] тогда площадь S соответствующей криволинейной трапеции можно приближенно подсчитать следующим образом.

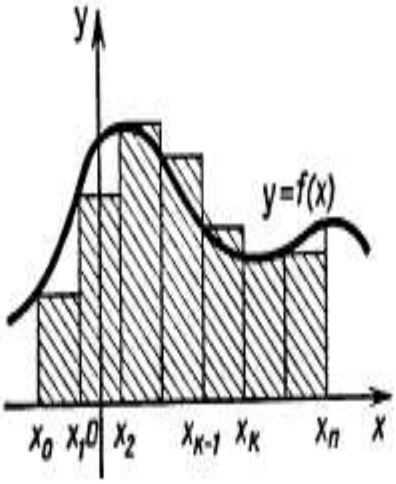


Рис. 1

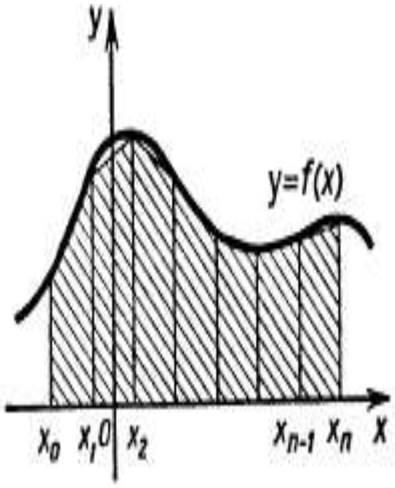


Рис. 2

Разобьем отрезок [a; b] на n отрезков одинаковой длины точками $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ и пусть $\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1}$, где k = 1, 2, ..., n — 1, n. На каждом из отрезков $[x_{k-1}; x_k]$ как на основании построим прямоугольник высотой $F(x_{k-1})$. Площадь этого прямоугольника равна:

$$f(x_{k-1})\Delta x = \frac{b-a}{n} f(x_{k-1})$$

а сумма площадей всех таких прямоугольников (рис. 1) равна:

$$S_n = \frac{b-a}{n}\left(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})\right)$$

В силу непрерывности функции f объединение построенных прямоугольников при большом n, т. е. при малом Δx, «почти совпадает» с интересующей нас криволинейной трапецией. Поэтому возникает предположение, что Sn≈S при больших n. (Коротко говорят: «S_n стремится к S при n, стремящемся к бесконечности»— и пишут: $S_n \to S$ при $n \to \infty$.) Предположение это правильно. Более того, для любой непрерывной на отрезке [a; b] функции a (не обязательно неотрицательной) S_n при $n \to \infty$ стремится к некоторому числу. Это число называют (по определению) **интегралом функции f от a до b** и обозначают $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, т. е.

$$S_n \to \int\limits_a^b f(x)\,dx \text{ при } n \to \infty \quad (1)$$

(читается: «Интеграл от a до b эф от икс дэ икс»). Числа a и b называются **пределами интегрирования**: a — нижним пределом, b — верхним. Знак $\int$ называют знаком интеграла. Функция f называется **подынтегральной функцией**, а переменная x — **переменной интегрирования**. Итак, если f(x)≥0 на отрезке [a; b] то площадь S соответствующей криволинейной трапеции выражается формулой

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

4. Формула Ньютона — Лейбница

Формула Ньютона — Лейбница или **основная теорема анализа** даёт соотношение между двумя операциями: взятием определённого интеграла и вычислением первообразной.

Если f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и F — её любая первообразная на этом отрезке, то имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$$

2.Примеры решения задач.

Пример 1.

Найти первообразную для функции $y = 3x^2 - 2$, проходящую через точку $M(2;4)$.

Решение. $F(x = 3\frac{x^3}{3} - 2x + c = x^3 - 2x + c$

Получили, что множество всех первообразных задается семейством функций

$y=F(x)+C$,

то есть $y=x^3-2x+C$, где C – произвольная постоянная.

Зная, что первообразная проходит через точку $M(2;4)$, подставим ее координаты в предыдущее выражение и найдем C.

$4=2^3-2\cdot 2+C \Leftrightarrow C=4-8+4;\ C=0$.

Ответ: $F(x)=x^3-2x$ – искомая первообразная

Пример 2.

а) Вычислить интеграл

$$\int_{-3}^{1}(2x^2+3x-1)dx = \left(\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-x\right)\Big|_{-3}^{1} =$$
$$= \frac{2}{3}+\frac{3}{2}-1-\left(-18+\frac{27}{2}+3\right) = \frac{7}{6}+\frac{3}{2} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

б) Вычислить интеграл $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$

Решение:

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

в) Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$

Решение:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}\cos\pi + \frac{1}{2}\cos 0 = 1$$

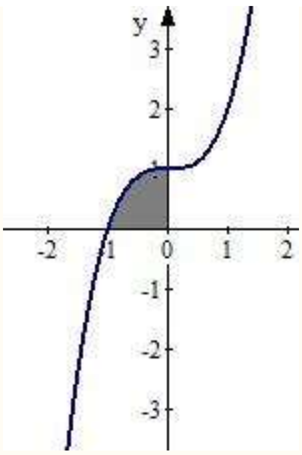
Пример3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями **$y=x^3+1$,**

$y=0$, $x=0$

Решение.

$F(x) = \frac{x^4}{4}+x$;

S = $F(0) - F(-1) = 0+0 - (\frac{1}{4} - (-1)) = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$



Ответ: $\frac{3}{4}$ ед.^{2}

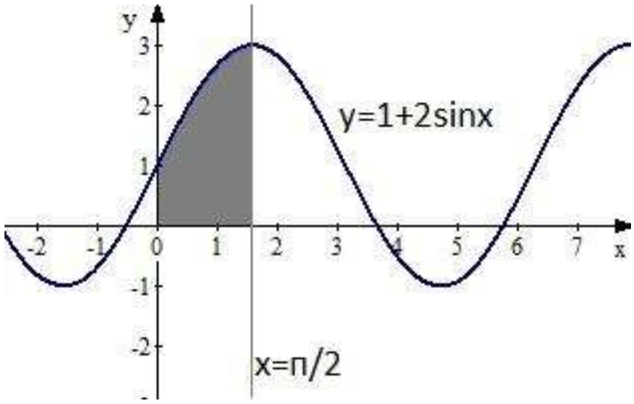
Пример 4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями **$y=1+2\sin x$,**

$y=0$, $x=0$, $x=п/2$

Решение.

$F(x) = x - 2\cos x$;

S = $F(п/2) - F(0) = п/2 - 2\cos п/2 - (0 - 2\cos 0)$ = **$п/2 + 2$**



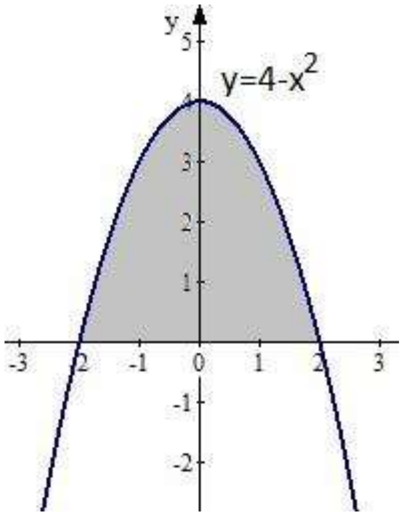
Ответ: п/2 + 2 квадратных единиц**.**

Пример 5. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями **$y= 4 -x^2$, $y=0$,**

Решение. Сначала построим график, чтобы определить пределы интегрирования.

Фигура состоит из двух одинаковых кусочков. Вычисляем площадь той части,

что справа от оси у, и удваиваем.



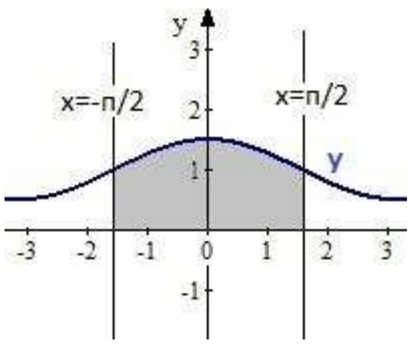
F(x) = 4x - x^3/3;   **S =** 2· (F(2) - F(0)) = 2·(4·2 - $\frac{8}{3}$-0)=16 - $\frac{16}{3}$= 16 - 5 $\frac{1}{3}$= **10** $\mathbf{\frac{2}{3}}$

Ответ: **10** $\mathbf{\frac{2}{3}}$ квадратных единиц.

Пример 6. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

y=1+ 0,5cos x, y=0, x=-п/2, x=п/2

Решение.



F(x) = x+0,5sinx;   **S =** 2·(F($\frac{\pi}{2}$) - F(0)) = 2·($\frac{\pi}{2}$)+0,5·sin($\frac{\pi}{2}$) -0 - 0,5sin0) = 2·($\frac{\pi}{2}$) +0,5) =

п +1≈ 4,14

Ответ: ≈ 4, 14 квадратных единиц.

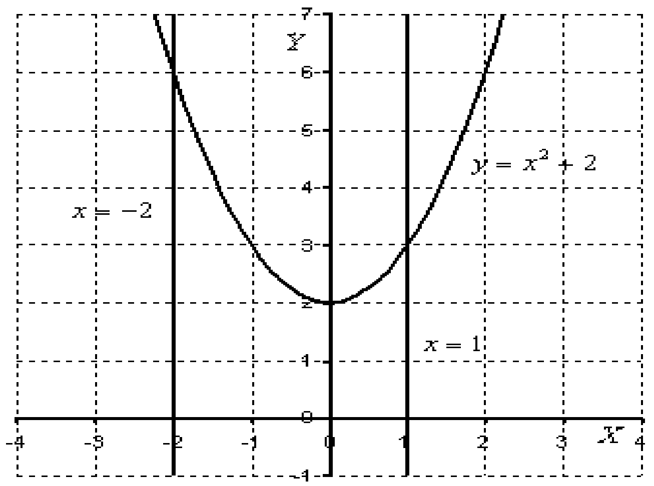
Пример 7

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = x^2 + 2$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 1$.

Решение:

1 Построить чертеж.



При построении чертежа я рекомендую следующий порядок: **сначала** лучше построить все прямые(если они есть) и только **потом** – параболы, гиперболы, графики других функций.

Выполним чертеж (обратите внимание, что уравнение $y = 0$ задает ось OX Штриховать криволинейную трапецию я не буду, здесь очевидно, о какой площади идет речь.

На отрезке $[-2; 1]$ график функции $y = x^2 + 2$ расположен **над осью** OX, поэтому:

$$S = \int_{-2}^{1} (x^2 + 2)dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2x\right)\Big|_{-2}^{1} = \frac{1}{3} + 2 - \left(-\frac{8}{3} - 4\right) = \frac{1}{3} + 2 + \frac{8}{3} + 4 = 9$$

Ответ: $S = 9$ $ед^2$

Вопросы для самоконтроля:

1. Сформулируйте определения первообразной.
2. Сформулируйте основное свойство первообразной.
3. Сформулируйте 3 правила нахождения первообразной.
4. Какую фигуру называют криволинейной трапецией?
5. Запишите формулу для вычисления площади криволинейной трапеции.
6. Объясните что такое интеграл.
7. Запишите формулу Ньютона – Лейбница.

Задания для самостоятельной работы.

При решении заданий студенты должны уметь:

1. Доказывать, что функция F является первообразной для функции f, используя определение первообразной;
2. находить первообразную в общем виде;
3. находить первообразную, принимающую значение в заданной точке;
4. вычислять интегралы;
5. изображать криволинейную трапецию, ограниченную линиями, находить ее площадь

Задания

1.**Докажите, что функция F есть первообразная для функции f**

на промежутке$(-\infty;\ \infty)$:

1) $F(x) = x^3 + 2x + 1$, $f(x) = 3x^2 + 2$;

2). $F(x) = 2\sin 2x - 2$, $f(x) = 4\sin 4x$;

3) $F(x)=x^3-2x+1$, $f(x)=3x^2-2$;

4) $F(x)=2\sin2x-2$, $f(x)=4\cos2x$;

5) $F(x)=2\sqrt{x+1}+1$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$;

6) $F(x)=x^3-5x+12$, $f(x)=3x^2-5$);

2.**Найдите первообразную, график, которой проходит через точку**

1 .Для функции $f(x) = x^2$ найдите первообразную, график которой проходит через точку M(-1; 2)

2 Для функции $f(x) = \cos x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $A(\pi; 1)$

3 Для функции $f(x) = 2x + 4$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $B(-1; 1)$

3. **Найти первообразную для функции**:

1) $f(x) = 1$;
2) $f(x) = x$;
3) $f(x) = 5x^4 + 2x + 2$;
4) $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 2$;
5) $f(x) = \frac{x^3}{x^4}$;
6) $f(x) = 2\sin x + 3\cos x$;
7) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + x^2$ на $(0; \infty)$;

4. **Вычислите:**

- $\int_{-1}^{2} dx$;
- $\int_{2}^{5} 4\ dx$;
- $\int_{1}^{4} (3 - 2x) dx$;
- $\int_{-1}^{2} dx$;

- $\int_{-2}^{1}(4x^3 + 6x)\ dx$;
- $\int_{1}^{4}\frac{5\sqrt{x}}{x}\ dx$;
- $\int_{1}^{4}(x^2 - 6x\ +9)\ dx$;
- $\int_{1}^{3} 2\ dx$;
- $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\ dx$;
- $\int_{0}^{8} x\sqrt[3]{x}\ dx$;
- $\int_{1}^{2}\frac{2x3+3x-2}{x^5}\ dx$;
- $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin 2x}$;

5.Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1. $y = x^3$, $y = 0$, $x= -3$;
2. $y = x^4, x = -1, x = 2$;
3. $y = 1 – x^2$, $y = 0$, $y = 4 - x^2$, $y = 0$;
4. $y = 9 – x^2$, $x = 0$, $y = 0$, $x = -2$;
5. $y = x^2 + 1$. $x= -1$. $x= 2$, $y = 0$;

Литература:

1. Башмаков М.И. Математика: учебник для студентов учреждений среднего профессионального образования. — М., 2018.
2. Башмаков М.И. Математика. Сборник задач профильной направленности: учебное пособие для студентов учреждений среднего профессионального образования. — М., 2018.
3.Башмаков М.И. Математика. Задачник: учебное пособие для студентов учреждений среднего профессионального образования. — М., 2018.

4.Математика: учеб. для ссузов/(Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко.) , стереотип. – М.: Дрофа, 2018г.

5.Геометрия, 10-11: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни / (Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.)- 21-е изд.-М.: Просвещение, 2018г.- 256 с.:ил.

Интернет - ресурсы

1. http://catalog.alledu.ru/predmet/math/
2. Учебно-информационные комплексы по математике для средних школ: http://mschool.kubsu.ru/uik/index.htm
3. Сайт-справочник правил, формул и теорем по математике: http://matemathik.narod.ru/
4. Мир Геометрии: http://geometr.info/
5. Страна Математика: http://ww: http://geometr.info/w.bymath.net/
6. Научно-популярный физико-математический журнал "Квант" (статьи по математике): http://kvant.mirror1.mccme.ru/rub/1.htm
7. Графики функций" Небольшой сайт в помощь школьнику, изучающему графики функций: определения, примеры, задачник: http://graphfunk.narod.ru/
8. Виртуальная школа юного математика http://math.ournet.md/indexr.html
9. http://khpi-iip.mipk.kharkiv.edu/library/datastr/book_sod/structura/chapter8.htm
10. http://www.bymath.net/studyguide/alg/sec/alg26.html