Министерство образования Кировской области
Кировское областное государственное образовательное
бюджетное учреждение среднего профессионального образования
«Зуевский механико-технологический техникум»

Методические указания
для обучающихся по выполнению
самостоятельных работ
по дисциплине ЕН-01 Математика

2020

Методические указания для выполнения самостоятельных работ являются частью основной профессиональной образовательной программы по специальности 35.02.07 «Механизация сельского хозяйства» и по специальности 19.02.10 «Технология продукции общественного питания»

Методические указания включают в себя перечень образовательных результатов, заявленных в ФГОС СПО по специальностям «Механизация сельского хозяйства», «Технология продукции общественного питания» учебную цель, задачи, обеспеченность занятия, краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме, вопросы для закрепления теоретического материала, задания для практической работы и инструкцию по ее выполнению, методику анализа полученных результатов, порядок и образец отчета о проделанной работе, критерии выполнения работ

Составитель: Карина О.В., преподаватель Кировского областного государственного образовательного бюджетного учреждение среднего профессионального образования «Зуевский механико-технологический техникум»

Рекомендована предметно-цикловой комиссией

Протокол № ____ от «_____»______2020

Пояснительная записка

Настоящий сборник предназначен в качестве методического пособия при проведении самостоятельных работ по программе учебной дисциплины ЕН- 01 Математика по специальности «Механизация сельского хозяйства» и «Технология продукции общественного питания»

Результаты обучения

В результате изучения обязательной части цикла обучающийся должен:
уметь:
решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;
знать:
значение математики в профессиональной деятельности и при освоении профессиональной образовательной программы;
основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности;
основные понятия и методы математического анализа, дискретной математики, теории вероятностей и математической статистики,
основы интегрального и дифференциального исчисления

Формируемые Общие компетенции

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и в команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), за результат выполнения заданий.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

Введение

Методические указания по дисциплине «Математика» для выполнения п самостоятельных работ созданы Вам в помощь для работы на занятиях, подготовки к практическим работам, правильного составления отчетов.

Приступая к выполнению практической работы, Вы должны внимательно прочитать цель и задачи занятия, ознакомиться с требованиями к уровню Вашей подготовки в соответствии с федеральным государственными образовательным стандартом (ФГОС) по специальности краткими теоретическими и учебно-методическими материалами по теме практической работы, ответить на вопросы для закрепления теоретического материала.

Все задания к практической работе Вы должны выполнять в соответствии с инструкцией, анализировать полученные в ходе занятия результаты по приведенной методике.

Отчет о практической работе Вы должны выполнить по приведенному алгоритму, опираясь на образец.

Выполненная работа представляется преподавателю в тетради для выполнения практических работ.

Порядок выполнения отчета по работе

1. В тетради для самостоятельной работы напишите номер работы и ее название.
2. Далее должно быть заглавие «Задание 1».
3. Под заглавием записывается условие задачи, решение и ответ (так для каждого примера из задания).

Наличие положительной оценки по практическим работам необходимо для получения зачета по дисциплине «Математика», поэтому в случае отсутствия на уроке по любой причине или получения неудовлетворительной оценки за практическую работу Вы должны найти время для ее выполнения или пересдачи.

Внимание! Если в процессе подготовки к практическим работам или при решении задач у Вас возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается, необходимо обратиться к преподавателю для получения разъяснений или указаний в дни проведения дополнительных занятий.

Время проведения дополнительных занятий можно узнать у преподавателя или посмотреть на двери его кабинета.

Перечень самостоятельных работ

№	Раздел программы	Тема работы
1	Дифференциальное и интегральное исчисление	
1.1		Вычисление пределов. Вычисление пределов с помощью замечательных пределов
1.2		Производные элементарных функций.
1.3		Производные сложных функций.
1.4		Вторая производная. Производные высших порядков.
1.5		Исследование функций с помощью производной.
1.6		Вычисление дифференциала функций, нахождение дифференциала первого и второго порядка
1.7		Неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование. Интегрирование методом замены переменной.
1.8		Вычисление площади криволинейной трапеции и объемов тел.
2	Основные понятия и методы дискретной математики	
2.1		Операции над множествами: пересечение множеств, объединение множеств, дополнение множеств.
2.2		Основные понятия теории графов.
3	Основы теории вероятности и математической статистики	
3.1	.	Элементы теории вероятностей и математической статистики: классическое определение вероятности события, формула полной вероятности
3.2		Дискретная случайная величина и ее числовые характеристики.

Раздел 1.Дифференциальное и интегральное исчисление

Самостоятельная работа № 1

Тема: Вычисление предела функции.

Цель занятия: закрепить навыки вычисления пределов функции, применения теорем о пределах функции; раскрытия различных видов неопределенностей.

Умения и навыки, которые должны приобрести обучаемые на занятии:
Студент должен знать: понятие предела функции, правила вычисления пределов, правила раскрытия неопределенностей типа $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$

Студент должен уметь: вычислять пределы функции,

применять теоремы о пределах.

Обеспеченность занятия (средства обучения):

1. Тетрадь для практических работ .
2. Ручка.
3. Рабочая тетрадь с теоретическим материалом (конспекты лекций).
4. Дидактические карточки с заданиями (4 варианта).

Задачи практической работы:

1. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
2. Ответить на вопросы для закрепления теоретического материала.
3. Решить один из вариантов.
4. Оформить решение в тетради.

Повторение теоретических основ:

1. Предел функции в точке (определение).
2. Основные свойства о пределах.
3. Правило раскрытия неопределенности типа $\left[\frac{0}{0}\right]$.
4. Правило раскрытия неопределенности типа $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$**.**

1. ***Определение***

Конечное число A называется **пределом функции $f(x)$ в точке x_0**, если для любого положительного числа ε можно указать такое положительное δ = δ(ε), что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, соответствующие значения функции удовлетворяют неравенству $|f(x) - A| < \varepsilon$. Для обозначения такого предела используют символику:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

2. **При решении задач полезно помнить следующие основные свойства пределов функций:**

1. Если функция имеет конечный предел, то он единственный.
2. Постоянный множитель можно выносить за знак предела
   $$\lim_{x \to a}[c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$
3. Предел суммы (или разности) функций равен сумме (или разности) их пределов, если оба предела являются конечными
   $$\lim_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$
4. Предел произведения функций равен произведению их пределов, если оба предела являются конечными
   $$\lim_{x \to a}[f(x) g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$
5. Предел отношения функций равен отношению их пределов, если оба предела являются конечными и знаменатель не обращается в нуль
   $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}, \text{если} \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$$

3. **Правило раскрытия неопределенности типа $\left[\frac{0}{0}\right]$.**

<u>Пример:</u>

1. Найти предел функции

$$\lim_{x \to -2} \frac{5x^2 + 13x + 6}{3x^2 + 2x - 8}$$

Решение:

Имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$

Для ее раскрытия разложим числитель и знаменатель на множители и сократим на общий множитель $x + 2$, который при $x \to -2$ не равен нулю. В результате неопределенность будет раскрыта.

$$\lim_{x \to -2} \frac{5x^2 + 13x + 6}{3x^2 + 2x - 8} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(5x+3)}{(x+2)(3x-4)} = \lim_{x \to -2} \frac{5x+3}{3x-4} = \frac{7}{10} = 0{,}7$$

2. Найти предел функции

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64}$$

Решение:

Имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$

Для ее раскрытия умножим числитель и знаменатель на выражение сопряженное числителю, разложим выражение, стоящее в знаменателе, на множители по формуле разности кубов и сократим числитель и знаменатель на общий множитель *x* - 4, который при *x* → 4 не равен нулю. В результате неопределенность будет раскрыта.

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 4} \frac{\left(\sqrt{21+x}-5\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}{\left(x^3-64\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{21+x-25}{\left(x^3-64\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)} = \lim_{x \to 4} \frac{x-4}{(x-4)\left(x^2+4x+16\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{1}{\left(x^2+4x+16\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)} = \frac{1}{480}.$$

4. Правило раскрытия неопределенности типа $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Пример:

Найти предел функции

$$\lim_{x \to \infty} \frac{7x^4+2x^3+5}{6x^4+3x^2-7x}$$

Решение:

Имеем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Для ее раскрытия можно либо разделить числитель и знаменатель на наибольшую степень переменной *x* и учитывая, что величина обратная бесконечно большой величине есть бесконечно малая величина, раскроем исходную неопределенность.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^4+2x^3+5}{6x^4+3x^2-7x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{7+2/x+5/x^4}{6+3/x^2-7/x^3}=\frac{7}{6},$$

Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию:

1. Что называется пределом функции в точке?
2. Какие вы знаете основные свойства о пределах?
3. Каковы правила раскрытия неопределенностей вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Задания практической работы

Вариант- 1.

Вычислить:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+8x^3}{2x+1}$$

$$\lim_{x\to -2}(2x^4-20)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-8x}{3x^2-2x+3}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+6x-7}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x}$$

Вариант- 2.

Вычислить:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x+5}{2}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-3x+12}{4x+5}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{3x^3-1}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x^2-4}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$$

Вариант -3.

Вычислить:

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x^3+3x^2}{5x+9}$$

$$\lim_{x\to -2}(2x^3-3x^2+6)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x+2}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{2x^2-5x+2}$$

$$\lim_{x \to 6} \frac{6 - x}{3 - \sqrt{x + 3}}$$

Вариант -4.

Вычислить:

$$\lim_{x \to -2} (4x^5 - 50x)$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 5x + 1}{3x + 5}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x - 2}{4x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \to 5} \frac{5 - x}{3 - \sqrt{2x - 1}}$$

Самостоятельная работа № 2

«Производные элементарных функций»

Учебная цель: Обобщить и систематизировать знания по теме «Понятие производной. Производные основных элементарных функций», закрепить умения находить производную функции, используя таблицу основных формул дифференцирования элементарных функций и правила дифференцирования.

Умения и навыки, которые должны приобрести обучаемые на занятии:

Студент должен знать: понятие производной функции;

– основные формулы и правила дифференцирования элементарных функций.

Студент должен уметь:

– решать задачи на отыскание производной элементарных функций.

Обеспеченность занятия (средства обучения):

1. Тетрадь для практических работ.
2. Ручка.
3. Рабочая тетрадь с теоретическим материалом (конспекты лекций).

Задачи практической работы:

5. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
6. Ответить на вопросы для закрепления теоретического материала.

7. Решить 20 задач на отыскание производной элементарных функций.
8. Оформить решение в тетради.

Повторение теоретических основ

Таблица производных основных элементарных функций.

1. $(c)' = 0$, c - const
2. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}$
3. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
4. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$
5. $(\sin x)' = \cos x$
6. $(\cos x)' = -\sin x$
7. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
8. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
9. $(a^x)' = a^x \ln a$
10. $(e^x)' = e^x$
11. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
12. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
13. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
16. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
17. $\left((kx+b)^{\alpha}\right)' = \alpha k (kx+b)^{\alpha-1}$

Правила дифференцирования.

1. $\left(Cf(x)\right)' = Cf'(x)$ - вынесение константы за знак производной.

2. $\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$ - производная суммы равна сумме производных.

3. $\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ - производная произведения.

4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, g(x) \neq 0$ - производная частного.

Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию:

1. Сформулируйте понятие производной функции.
2. Повторите правила дифференцирования
3. Чему равна производная константы?
4. Как продифференцировать алгебраическую сумму функций?
5. Как найти производную произведения (частного)?
6.
7. В чем состоит физический смысл производной?
8. В чем состоит геометрический смысл производной?

Задания для практического занятия:

Задание №1 Найти производные элементарных функций.

1) $y = \sqrt{3}$

2) $y = x + 3$

3) $y = 3x$

4) $y = \sqrt{2} - x$

5) $y = \pi x - 0{,}7$

6) $y = \dfrac{x}{5} + 4$

7) $y = x^{\frac{7}{5}} - x + e^x$

8) $y = \cos x + 3\sin x$

9) $y = 3x^3 + 4x^2 + 2$

10) $y = 0{,}2x^5 - \dfrac{3}{4}x^4 - 6x + 8$

11) $y = \dfrac{2}{3}x^6 + \dfrac{1}{2}x^4 + x^2$

12) $y = x^2 \cdot \ln x$

13) $y = \sqrt[3]{x^2} - \dfrac{1}{x^3}$

14) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

15) $y = 2\sin x \cdot (1 - \cos x)$

16) $y = \dfrac{2x^3}{\sqrt{x^3}}$

Задание №2 Найти значения производной функции в указанных точках.

1) $y = x\sqrt[4]{x}$ $\qquad x = 16$

2) $y = 1 - x^2 + \sqrt{x}$ $\qquad x = 4$

3) $y = 3x^5 - 2x^4 + x\sqrt{x}$ $\qquad x = 1$

4) $y = lg\,x + x^3$ $\qquad x = 1$

Инструкция по выполнению практической работы и образец оформления работы.

1. В первом задании Вы должны найти производные элементарных функций, используя основные формулы и правила дифференцирования, предварительно выполнив преобразования над функциями, если это необходимо.

2. Во втором задании вы должны найти частные значения производных в указанных точках, предварительно найдя производную самой функции.

Задание № 1 Найти производные элементарных функций.

1) $f(x) = 2x^3 – 3x^4 + 19$.

Решение.

$f^{/}(x) = (2x^3 – 3x^4 + 19)^{/} = (2x^3)^{/} - (3x^4)^{/} - 19^{/} = 6x^2 – 12x^3 + 0 = 6x^2 – 12x^3$.

2) $f(x) = \dfrac{\sin x - \sqrt{x}}{e^x}$

Решение.

Находим производную частного.

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x - \sqrt{x}}{e^x}\right)' = \frac{\left(\sin x - \sqrt{x}\right)' e^x - \left(\sin x - \sqrt{x}\right)\left(e^x\right)'}{\left(e^x\right)^2} = \frac{\left(\left(\sin x\right)' - \left(\sqrt{x}\right)'\right)\cdot e^x - \left(\sin x - \sqrt{x}\right)\cdot e^x}{e^{2x}} =$$

$$= \frac{\left(\cos x - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^x - \left(\sin x - \sqrt{x}\right)\cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(\cos x - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \sin x - \sqrt{x})}{e^{2x}} = \frac{\left(\cos x - \sin x - \frac{1+2x}{2\sqrt{x}}\right)}{e^x}$$

3) f(x) = $x^2 – 1/x + (x – e^x)(x + 2)^3$.

Решение.

$$f'(x) = (x^2 - \frac{1}{x} + (x - e^x)(x+2)^3)' = \left(x^2\right)' - \left(\frac{1}{x}\right)' + \left(x - e^x\right)'(x+2)^3 + \left(x - e^x\right)\left((x+2)^3\right)' =$$

$$= 2x^{2-1} - \left(-\frac{1}{x^2}\right) + (1 - e^x)(x+2)^3 + \left(x - e^x\right)3(x+2)^2 = 2x + \frac{1}{x^2} + (x+2)^2\left(\left(1 - e^x\right)(x+2) + 3\left(x - e^x\right)\right) =$$

$$= 2x + \frac{1}{x^2} + (x+2)^2\left(x + 2 - xe^x - 2e^x + 3x - 3e^x\right) = 2x + \frac{1}{x^2} + (x+2)^2\left(4x - xe^x - 5e^x + 2\right)$$

Методика анализа результатов, полученных в ходе практической работы

1. В первом задании у Вас должен быть построен график функции, согласно результатам исследования, занесенным в таблицу.
2. Во второй задаче должен быть только числовой ответ.

Порядок выполнения отчета по практической работе

1. В тетради для практических работ напишите номер практической работы и ее название.
2. Далее должно быть заглавие «Задание 1».
3. Под заглавием записывается условие задачи, решение и ответ (так для каждого примера из задания).

Образец выполнения заданий.

Задание. Исследовать функцию $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2$ **и построить ее график.**

Решение.

1) **Область определения** – множество действительных чисел.
2) **Точки пересечения с осями координат**:

если x = 0, то y = 0 – точка А (0,0);

если y = 0, то решим уравнение $\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 = 0$.

$$\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2=0 \Rightarrow x^2\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x}{3}-1\right)=0 \Rightarrow x^2=0 \text{ и } \quad \frac{x^2}{4}-\frac{x}{3}-1=0\Big|\cdot 12$$

$$x_1=0 \; 3x^2-4x-12=0$$

$$x_{2,3}=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot 3\cdot(-12)}}{6}=\frac{4\pm 4\sqrt{10}}{6}=\frac{2\pm 2\sqrt{10}}{3}$$

$$x_2=\frac{2+2\sqrt{10}}{3}\approx 2{,}8 \quad \text{и} \quad x_3=\frac{2-2\sqrt{10}}{3}\approx -1{,}4$$

Получили еще две точки B ($\frac{2+2\sqrt{10}}{3}$; 0) и C ($\frac{2-2\sqrt{10}}{3}$; 0).

3) **Четность, нечетность**: $y(-x)=\frac{(-x)^4}{4}-\frac{(-x)^3}{3}-(-x)^2=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2$ - функция не является ни четной, ни нечетной.

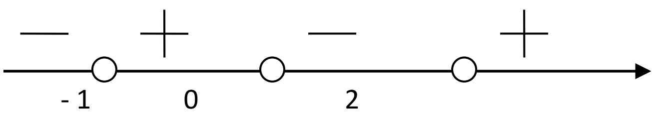
4) **Находим производную**.

$$y'=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right)'=4\cdot\frac{x^3}{4}-3\cdot\frac{x^2}{3}-2x=x^3-x^2-2x=x(x^2-x-2)=x(x+1)(x-2)$$

.

5) **Стационарные точки.** Приравняем производную к нулю: $x(x+1)(x-2)=0$, получимх = -1, x = 0, x= 2 – стационарные точки.

6) **Промежутки возрастания и убывания.** Найденные точки разбивают



числовую прямую на четыре промежутка, определим знак производной на этих промежутках.

7) **Точки экстремума.** x = -1, x = 2 – точки минимума; x = 0 – точка максимума.

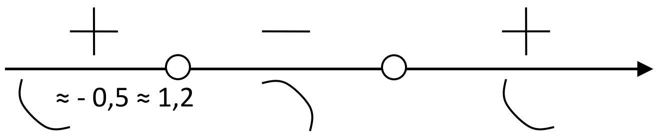
8) **Выпуклость и точки перегиба.**

Найдем вторую производную: $y''=\left(x^3-x^2-2x\right)'=3x^2-2x-2$.

Найдем точки перегиба: $y''=0$;

$$3x^2-2x-2=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{7}}{3}$$

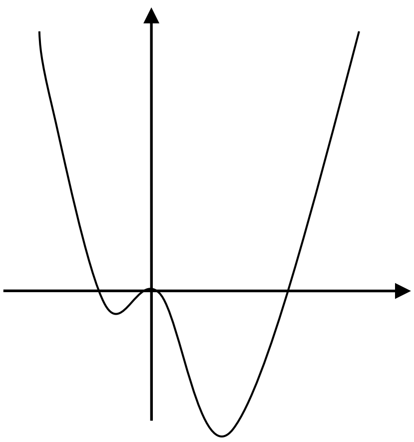
$x_1=\frac{1+\sqrt{7}}{3}\approx 1{,}2$ и $x_2=\frac{1-\sqrt{7}}{3}\approx -0{,}5$ - точки перегиба



Определим знак второй производной на интервалах:

9) **Составим таблицу.**

x	$x < -1$	- 1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$x > 2$	3
f ‘(x)	-	0	+	0	-	0	+	
f(x)	↘	- 5/12 min	↗	0 max	↘	- 8/3 min	↗	9/4



Самостоятельная работа 6.

Тема: Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными, линейные.

Цель занятия: закрепить навыки решения дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными и линейных.

Умения и навыки, которые должны приобрести обучающиеся на занятии: находить общее и частное решения линейного дифференциального уравнения первого порядка и с разделяющимися переменными.

Наглядные пособия, оборудование: плакаты с формулами дифференцирования и интегрирования; микрокалькулятор; дидактические карточки с заданиями.

Повторение теоретических основ:

1. **Определение дифференциального уравнения.**
2. **Что называется общим и частным решениями дифференциального уравнения.**
3. **Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.**
4. **Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.**
5. **Решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка методом Бернулли**

1. **Определение**
   Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида $F(x,y,y') = 0$.

В дифференциальное уравнение первого порядка входит первая производная и не входят производные более высокого порядка.

Уравнение $y' = f(x,y)$ называется уравнением первого порядка, разрешённым относительно производной.

2. **Общим решением** дифференциального уравнения первого порядка называется функция вида $y = \varphi(x,C)$, которая содержит одну произвольную постоянную.

Пример типового расчета:

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка $y' + \frac{y}{x} = 3x$.

Решением этого уравнения является функция $y = \frac{C}{x} + x^2$.

Действительно, заменив в данном уравнении, y его значением, получим

$\left(\frac{C}{x}+x^2\right)' + \frac{\frac{C}{x}+x^2}{x} = 3x,\ -\frac{C}{x^2}+2x+\frac{C}{x^2}+x=3x,$ то есть *3x=3x*

Следовательно, функция $y=\frac{C}{x}+x^2$ является общим решением уравнения $y'+\frac{y}{x}=3x$ при любом постоянном С.

Найти частное решение данного уравнения, удовлетворяющее начальному условию *y(1)=1* Подставляя начальные условия *x = 1, y =1* в общее решение уравнения $y=\frac{C}{x}+x^2$, получим $1=\frac{C}{1}+1,$ откуда *C = 0*.

Таким образом, частное решение получим из общего $y=\frac{C}{x}+x^2$ подставив в это уравнение, полученное значение *C = 0* $y=\frac{0}{x}+x^2,\ y=x^2$ – частное решение.

3. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида: *y'=f(x)g(y)* или через дифференциалы $\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$, где *f(x)* и *g(y)*– заданные функции.

Для тех *y*, для которых $g(y)\neq 0$, уравнение *y'=f(x)g(y)* равносильно уравнению, $\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx,$ в котором переменная *y* присутствует лишь в левой части, а переменная x- лишь в правой части. Говорят, «в уравнении *y'=f(x)g(y* разделим переменные».

Уравнение вида $\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx,$ называется уравнением с разделёнными переменными.

Проинтегрировав обе части уравнения $\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx,$ по *x*, получим *G(y) = F(x) + C*– общее решение уравнения, где *G(y)* и *F(x)* – некоторые первообразные соответственно функций $\frac{1}{g(y)}$ и *f(x)*, *C* произвольная постоянная.

Алгоритм решения дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

1. Производную функции переписать через её дифференциалы $y' = \frac{dy}{dx}$.
2. Разделить переменные.
3. Проинтегрировать обе части равенства, найти общее решение.
4. Если заданы начальные условия, найти частное решение.

Пример типового расчета:

Найти частное решение уравнения

$2yy' = 1 - 3x^2$, если $y_0 = 3$ при $x_0 = 1$

Это—уравнение с разделенными переменными. Представим его в дифференциалах. Для этого перепишем данное уравнение в виде $2y\frac{dy}{dx} = 1 - 3x^2$. Отсюда $2ydy = (1 - 3x^2)dx$.

Интегрируя обе части последнего равенства, найдем $\int 2ydy = \int (1 - 3x^2)dx$, т.е. $y^2 = x - x^3 + C$.

Подставив начальные значения $x_0 = 1, y_0 = 3$ найдем C 9=1-1+C, т.е. C = 9.

Следовательно, искомый частный интеграл будет $y^2 = x - x^3 + 9$, или $x^3 + y^2 - x - 9 = 0$.

$y = 2x^2 - 3x - 5$.

4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида $y' = f(x)y + g(x)$

где $f(x)$ и $g(x)$ - некоторые заданные функции.

Если $g(x)=0$ то линейное дифференциальное уравнение называется однородным и имеет вид: $y' = f(x)y$

Если $g(x) \neq 0$, то уравнение $y' = f(x)y + g(x)$ называется неоднородным.

Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения $y' = f(x)y$ задается формулой: $y = Ce^{\int f(x)dx}$, где C – произвольная постоянная.

В частности, если *C =0,* то решением является $y = 0$ Если линейное однородное уравнение имеет вид $y' = ky$ где k - некоторая постоянная, то его общее решение имеет вид: $y = Ce^{kx}$.

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $y' = f(x)y + g(x)$ задается формулой $y = Ce^{\int f(x)dx} + \varphi(x)$,

т.е. равно сумме общего решения соответствующего линейного однородного уравнения и частного решения $y = \varphi(x)$ данного уравнения.

Для линейного неоднородного уравнения вида $y' = kx + b$,

где k и b- некоторые числа и $k \neq 0$ частным решением будет являться постоянная функция $y = -\frac{b}{k}$. Поэтому общее решение имеет вид $y = Ce^{kx} - \frac{b}{k}$.

<u>Пример типового расчета:</u>

Решить уравнение $y' + 2y + 3 = 0$

Решение. Представим уравнение в виде $y' = -2y - 3$ где $k = -2$, $b= -3$ Общее решение задается формулой $y = Ce^{kx} - \frac{b}{k}$.

Следовательно, $y = Ce^{-2x} - \frac{3}{2}$, где C – произвольная постоянная.

Ответ: $y = Ce^{-2x} - \frac{3}{2}$.

5. Решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка методом Бернулли

Нахождение общего решения линейного дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x)y + g(x)$ сводится к решению двух дифференциальных уравнений с разделенными переменными с помощью подстановки $y=uv$, где u и v - неизвестные функции от x. Этот метод решения называется методом Бернулли.

Алгоритм решения линейного дифференциального уравнения первого порядка

$y' = f(x)y + g(x)$

1. Ввести подстановку $y=uv$.

2. Продифференцировать это равенство $y' = u'v + uv'$

3. Подставить y и y' в данное уравнение: $u'v + uv' = f(x)uv + g(x)$ или $u'v + uv' + f(x)uv = g(x)$.

4. Сгруппировать члены уравнения так, чтобы u вынести за скобки:
$u'v + (uv' + f(x)uv) = g(x)$, $u'v + u(v' + f(x)v) = g(x)$.

5. Из скобки, приравняв ее к нулю, найти функцию $v = v(x)$: $v' + f(x)v = 0$.

Это уравнение с разделяющимися переменными: $\dfrac{dv}{dx} + f(x)v = 0$, $\dfrac{dv}{dx} = -f(x)v$.

Разделим переменные и получим: $\dfrac{dv}{v} = -f(x)dx$,

Откуда $\int\dfrac{dv}{v} = -\int f(x)dx$, $\ln|v| = -\int f(x)dx$. $v = e^{-\int f(x)dx}$.

6. Подставить полученное значение v в уравнение $u'v = g(x)$ (из п.4):

$u'e^{-\int f(x)dx} = g(x)$

и найти функцию $u = u(x;c)$. Это уравнение с разделяющимися переменными:
$\dfrac{du}{dx}e^{-\int f(x)dx} = g(x)$, $du = e^{\int f(x)dx} = g(x)$,

$u = \int e^{\int f(x)dx} g(x)dx + C$.

7. Записать общее решение в виде: $y = v(x)\cdot u(x;c)$, т.е.
$y = e^{-\int f(x)dx}\cdot\left(\int e^{\int f(x)dx}\cdot g(x)dx + C\right)$.

<u>Пример типового расчета:</u>

Найти частное решение уравнения $y' = -2y + 3 = 0$ если $y = 1$ при $x = 0$

Решение. Решим его с помощью подстановки $y=uv$, $.y' = u'v + uv'$

Подставляя y и y' в данное уравнение, получим $u'v + uv' - 2uv = -3$.

Сгруппировав второе и третье слагаемое левой части уравнения, вынесем общий множитель u за скобки $u'v + (uv' - 2uv) = -3$, $u'v + u(v' - 2v) = 0$.

Выражение в скобках приравниваем к нулю и, решив полученное уравнение, найдем функцию *v = v(x)* $v' - 2v = 0, \quad \frac{dv}{dx} = 2v, \quad dv = 2v dx, \quad \frac{dv}{v} = 2dx.$

Получили уравнение с разделенными переменными. Проинтегрируем обе части этого уравнения: $\int \frac{dv}{v} = \int 2dx.$ Найдем функцию *v*: $\ln|v| = 2x, \quad v = e^{2x}.$

Подставим полученное значение *v* в уравнение $u'v = -3.$ Получим:
$u'e^{2x} = -3, \quad \frac{du}{dx}e^{2x} = -3, \quad du = -3e^{-2x}dx.$

Это уравнение с разделенными переменными. Проинтегрируем обе части уравнения: $\int du = -\int 3e^{-2x}dx.$ Найдем функцию *u = u(x,c)*
$u = -3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x} + C, \quad u = \frac{3}{2}e^{-2x} + C.$ Найдем общее решение:
$y = e^{2x} \cdot \left(\frac{3}{2}e^{-2x} + C\right), \quad y = \frac{3}{2} + Ce^{2x}.$ Найдем частное решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям *y = 1* при *x = 0*:

$$1 = \frac{3}{2} + Ce^{2\cdot 0}, \quad 1 = \frac{3}{2} + C \cdot 1, \quad C = 1 - \frac{3}{2}, \quad C = -\frac{1}{2},$$

$$y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{2x}, \quad y = \frac{3 - e^{2x}}{2} - \text{ частное решение.}$$

Ответ: $y = \frac{3 - e^{2x}}{2}.$

Практика: студенты самостоятельно выполняют расчеты по дидактическим карточкам с заданиями (2 варианта).

Приложение: дидактические карточки с заданиями в 2 варианта.

Контрольные вопросы:

1. Что называется дифференциальным уравнением?
2. Что называется общим и частным решением дифференциального уравнения?
3. Какие вы знаете дифференциальные уравнения первого порядка?
4. Назовите алгоритм решения дифференциальных уравнений первого порядка для нахождения частного решения?

Вариант – 1.

Найти частные решения дифференциальных уравнений.

1. $(1-y)dx-(1+x)dy=0$, *при y(1)=3*
2. $x^2\cdot\frac{dy}{dx}-2xy=3, при y(1)=1$

Вариант – 2.

Найти частные решения дифференциальных уравнений.

1. $\sqrt{x}dy-\sqrt{y}dx=0;$ *при y=0 и x=0*
2. $y'+\frac{2y}{x}=x^3, y(1)=1$

Самостоятельная работа №6.1

Тема: Дифференциальные уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, линейные.

Вариант – 1.

Найти частные решения дифференциальных уравнений.

1. $(x+3)dy-(y+2)dx=0,$ *если* $y=3$ *при* $x=2;$

2. $y'+2y+4=0,$ *если* $y=5$ *при* $x=0;$

Вариант – 2.

Найти частные решения дифференциальных уравнений.

1. $(1-x)dy-(y-1)dx=0,$ *если* $y=3$ *при* $x=2;$

2. $y'-y+4=0,$ *если* $y=5$ *при* $x=0;$

Самостоятельная ***работа № 7***

«Неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование»

Учебная цель: Обобщить и систематизировать знания по теме «Элементы дифференциального и интегрального исчисления»; закрепить умения интегрировать функцию, используя таблицу основных интегралов.

Учебные задачи:

1. Создать условия для развития способностей обучаться самостоятельно, для формирования системы знаний и общих компетенций, связанных с темой «Неопределенный интеграл».

2. Обеспечить проверку и оценку знаний и способов деятельности студентов.

3. Обобщение и систематизация материала, изученного по теме «Неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование».

Образовательные результаты, заявленные во ФГОС третьего поколения:

Студент должен

<u>уметь:</u>

– решать задачи на отыскание первообразной функции;
– применять таблицу интегралов основных элементарных функций для отыскания неопределенного интеграла;
– решать задачи на отыскание неопределенного интеграла с помощью преобразования подинтегальных выражений.

знать:

- понятие первообразной функции;
- понятие неопределенного интеграла;
- основные правила и формулы итегрирования.

Задачи практической работы:

1. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
2. Ответить на вопросы для закрепления теоретического материала.
3. Решить 20 задач на отыскание неопределенного интеграла методом непосредственного интегрирования.
4. Оформить решение в тетради.

Обеспеченность занятия (средства обучения):

1. Тетрадь для практических работ *(в клетку, 12 листов).*
2. Ручка.
3. Рабочая тетрадь с теоретическим материалом (конспекты лекций).

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы.

Первообразная и неопределенный интеграл.

Определение. Функция *F(x)* называется первообразной для функции *f(x)* на некотором промежутке, если для всех *x* из этого промежутка $F'(x) = f(x)$.

Теорема 1. Если функция F(x) есть первообразная для функции f(x) на некотором промежутке, то функция

$$F(x) + C,$$

где C – произвольная постоянная, также является первообразной для f(x) на том же промежутке, причем любая другая первообразная Φ(x) может быть записана в виде

$$\Phi(x) = F(x) + C.$$

Определение. Совокупность всех первообразных для функции f(x), определенных на промежутке X, называется неопределенным интегралом от функции f(x) на этом промежутке и обозначается $\int f(x)dx$.

Таким образом $\int f(x)dx = F(x) + C$

Таблица основных интегралов.

1. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ 2. $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln x + C$

3. $\int \cos x dx = \sin x + C$ 4. $\int \sin x dx = -\cos x dx + C$

5. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} = tgx + C$ 6. $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

7. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ 8. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$

9. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$ 10. $\int e^x dx = e^x + C$

11. $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C$ 12. $\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C$

13. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{x}{a} + C$ 14. $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$

15. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$ 16. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$

17. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$ 18. $\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \dfrac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$

19. $\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \dfrac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию:

1. Что называется первообразной функции f(x)?
2. Что называется неопределенным интегралом функции f(x)?
3. Сформулируйте теорему о множестве первообразных функции f(x)?

Задания для практического занятия:

Задание № 1. Найти неопределенный интеграл, пользуясь таблицей основных интегралов.

1) $\int x^3 dx$ 2) $\int x^{11} dx$ 3) $\int 5dx$

4) $\int \frac{dx}{4}$ 5) $\int x\sqrt{2}dx$ 6) $\int \frac{2}{3}x^4 dx$

7) $\int \frac{dx}{x^5}$ 8) $\int (x-5e^x)dx$ 9) $\int (\frac{5}{x}+\sin x)dx$

10) $\int (2^x-1)dx$ 11) $\int \frac{dx}{16+x^2}$ 12) $\int \frac{3a}{\cos^2 x}dx$

13) $\int (5x^4-7x^6+3)dx$

Задание № 2. Найти неопределенный интеграл, преобразуя выражения стоящие под знаком интеграла.

14) $\int \frac{3+2x-x^2}{x}dx$ 15) $\int \frac{(x^2+3)^2}{x^2}dx$

16) $\int \frac{dx}{\cos 2x+\sin^2 x}$ 17) $\int (2+x)^2 \cdot \sqrt[3]{x}dx$

18) $\int \frac{x^2+7x+12}{x+3}dx$ 19) $\int \frac{2+3x^2}{x^2(1+x^2)}dx$

20) $\int \frac{3-\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}dx$

Форма контроля выполнения практических работ

Выполненная работа представляется преподавателю в тетради для выполнения практических работ по дисциплине «Математика».

Инструкция по выполнению практической работы

1. В первом задании Вы должны найти неопределенный интеграл, пользуясь таблицей основных интегралов.
2. Во втором задании Вы должны найти неопределенный интеграл, предварительно преобразовав выражения стоящие под знаком интеграла.

Методика анализа результатов, полученных в ходе практической работы

1. В первом и во втором задании у вас должно получиться выражение – множество первообразных для данной функции.

Порядок выполнения отчета по практической работе

1. В тетради для практических работ напишите номер практической работы и ее название.
2. Далее должно быть заглавие «Задание 1».
3. Под заглавием записывается условие задачи, решение и ответ (так для каждого примера из задания).

Образец отчета по практической работе

Задание №1Найти неопределенный интеграл, пользуясь таблицей основных интегралов.

1) $\int (x+3)(x-2)dx$

Решение

$$\int (x+3)(x-2)dx = \int (x^2 + x - 6)dx == \int x^2 dx + \int x dx - 6\int dx =$$

$$= \frac{x}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + C$$

2) $\int \frac{3a+1}{ax^3}dx$

Решение

$$\int \frac{3a+1}{ax^3}dx = \frac{3a+1}{a}\int \frac{1}{x^3}dx = \frac{3a+1}{a}\int x^{-3}dx = \frac{3a+1}{a}\cdot\frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{3a+1}{a}\cdot\frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{3a+1}{ax^2} + C$$

3) $\int x\sqrt[5]{x^3}dx$

Решение

$$\int x\sqrt[5]{x^3}dx = \int x \cdot x^{\frac{3}{5}}dx = \int x^{\frac{8}{5}}dx = \frac{x^{\frac{8}{5}+1}}{\frac{8}{5}+1} + C = \frac{x^{\frac{13}{5}}}{\frac{13}{5}} + C = \frac{5}{13}x^2 \cdot x^{\frac{3}{5}} + C = \frac{5}{13}x^2\sqrt[5]{x^3} + C$$

Задание №2 Найти неопределенный интеграл, преобразуя выражения стоящие под знаком интеграла.

По аналогии с первым заданием записывается условие, под ним – решение.

Самостоятельная ***работа № 7.1***

«Интегрирование методом замены переменной»

Учебная цель: Обобщить и систематизировать знания по теме «Элементы дифференциального и интегрального исчисления»; закрепить умения интегрировать функцию, используя метод замены переменной.

Учебные задачи:

1. Создать условия для развития способностей обучаться самостоятельно, для формирования системы знаний и общих компетенций, связанных с темой «Неопределенный интеграл. Интегрирование методом замены переменной».

2. Обеспечить проверку и оценку знаний и способов деятельности студентов.

3. Обобщение и систематизация материала, изученного по теме «Неопределенный интеграл. Интегрирование методом замены переменной».

Образовательные результаты, заявленные во ФГОС третьего поколения:

Студент должен

уметь:

- решать задачи на отыскание первообразной функции;
- применять таблицу интегралов основных элементарных функций для отыскания неопределенного интеграла;
- решать задачи на отыскание неопределенного интеграла методом замены переменной.

знать:

- понятие первообразной функции;
- понятие неопределенного интеграла;
- основные правила и формулы итегрирования.

Задачи практической работы:

1. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
2. Ответить на вопросы для закрепления теоретического материала.

3. Решить 10 задач на отыскание неопределенного интеграла методом замены переменой.
4. Оформить решение в тетради.

Обеспеченность занятия (средства обучения):

1. Тетрадь для практических работ *(в клетку, 12 листов).*
2. Ручка.
3. Рабочая тетрадь с теоретическим материалом (конспекты лекций).

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы.

Таблица основных интегралов.

1. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$

2. $\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$

3. $\int \cos x dx = \sin x + C$

4. $\int \sin x dx = -\cos x dx + C$

5. $\int \frac{1}{\cos^2 x} = tgx + C$

6. $\int \frac{1}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

8. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$

9. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

10. $\int e^x dx = e^x + C$

11. $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C$

12. $\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C$

13. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C$

14. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

15. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

18. $\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$

19. $\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

В основе интегрирования методом замены переменной (методом подстановки) лежит формула

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C, \text{ где } x = \varphi(t)$$

Алгоритм вычисления неопределенного интеграла методом подстановки:

1. Определяют, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл (предварительно преобразовав подынтегральное выражение, если нужно).
2. Определяют, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записывают эту замену.
3. Находят дифференциалы обеих частей записи и выражают дифференциал старой переменной (или выражение, содержащее этот дифференциал) через дифференциал новой переменной.
4. Производят замену под интегралом.
5. Находят полученный интеграл.
6. В результате производят обратную замену, т.е. переходят к старой переменной. Результат полезно проверять дифференцированием.

Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию:

1. Что называется первообразной функции f(x)?
2. Что называется неопределенным интегралом функции f(x)?
3. Сформулируйте теорему о множестве первообразных функции f(x)?
4. Перечислите известные вам мет оды интегрирования.
5. Охарактеризуйте каждый из них.

Задания для практического занятия:

Задание № 1. Найти неопределенный интеграл.

1. $\int (7-2x)^3 dx$ *6.* $\int \frac{6z^2 dz}{(1-2z^3)^4}$

2. $\int (5t-1)^4 dt$ *7.* $\int \frac{e^{3x} dx}{e^{3x}+1}$

3. $\int \frac{dx}{(3x+1)^2}$ 8. $\int \sqrt{2\sin x - 1}\cos x dx$

4. $\int \sqrt[3]{(3x+1)^2}dx$ 9. $\int \frac{\cos x dx}{2\sin x + 1}$

5. $\int 4(x^4-1)^5 x^3 dx$ 10. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{(5x^4+2)^2}}$

Задание №2 Найдите следующие интегралы

А) $\int x^2(1+2x)dx$

Б) $\int \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}$

Форма контроля выполнения практических работ

Выполненная работа представляется преподавателю в тетради для выполнения практических работ по дисциплине «Математика».

Инструкция по выполнению практической работы

В данных задании Вы должны найти неопределенный интеграл, пользуясь метод замены переменной.

Методика анализа результатов, полученных в ходе практической работы

1. В результате решения задач у вас должно получиться выражение – множество первообразных для данной функции.

Порядок выполнения отчета по практической работе

1. В тетради для практических работ напишите номер практической работы и ее название.
2. Далее должно быть заглавие «Задание 1».
3. Под заглавием записывается условие задачи, решение и ответ (так для

каждого примера из задания).

Образец отчета по практической работе

Задание №1Найти неопределенный интеграл, пользуясь таблицей основных интегралов.

1. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{\left(x^3-1\right)^3}}$

Решение.

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{\left(x^3-1\right)^3}}=\left|\begin{array}{l} x^3-1=t \\ 3x^2dx=dt \\ x^2dx=\frac{1}{3}dt \end{array}\right|=\int \frac{\frac{1}{3}dt}{\sqrt{t^3}}=\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{3}\int t^{-\frac{3}{2}}dt=\frac{1}{3}\frac{t^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}+C=\frac{1}{3}\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}+C=$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{t}}+C=-\frac{2}{3\sqrt{x^3-1}}+C$$

2. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1-\sin x}}$

Решение.

$$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1-\sin x}}=\left|\begin{array}{l} 1-\sin x=t \\ -\cos x dx=dt \\ \cos x dx=-dt \end{array}\right|=\int \frac{-dt}{\sqrt{t}}=-\int t^{-\frac{1}{2}}dt=-\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=-\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=-2\sqrt{t}+C=-2\sqrt{1-\sin x}+C$$

Самостоятельная работа № 7.2

«Вычисление определенного интеграла»

Учебная цель: Обобщить и систематизировать знания по теме «Элементы интегрального исчисления»; закрепить умения интегрировать функцию, вычислять определенный интеграл с помощью формулы Ньютона-Лейбница различными методами.

Учебные задачи:

1. Создать условия для развития способностей обучаться самостоятельно, для формирования системы знаний и общих компетенций, связанных с темой «Определенный интеграл».

2. Обеспечить проверку и оценку знаний и способов деятельности студентов.

3. Обобщение и систематизация материала, изученного по теме «Определенный интеграл».

Образовательные результаты, заявленные во ФГОС третьего поколения:

Студент должен

уметь:

– решать задачи на отыскание первообразной функции;
– применять таблицу интегралов основных элементарных функций для отыскания определенного интеграла;
– решать задачи на вычисление определенного.

знать:

– понятие первообразной функции;
– понятие определенного интеграла;
– основные правила и формулы итегрирования.

Задачи практической работы:

1. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
2. Ответить на вопросы для закрепления теоретического материала.
3. Решить 16 задач на отыскание определенного интеграла.
4. Оформить решение в тетради.

Обеспеченность занятия (средства обучения):

4. Тетрадь для практических работ *(в клетку, 12 листов).*
5. Ручка.
6. Рабочая тетрадь с теоретическим материалом (конспекты лекций).

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы.

Таблица основных интегралов.

1. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$

2. $\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$

3. $\int \cos x dx = \sin x + C$

4. $\int \sin x dx = -\cos x dx + C$

5. $\int \frac{1}{\cos^2 x} = tgx + C$

6. $\int \frac{1}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

8. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$

9. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

10. $\int e^x dx = e^x + C$

11. $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C$

12. $\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C$

13. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C$

14. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

15. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

18. $\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$

19. $\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

Определение. Разность F(b) – F(a) называют определенным интегралом от функции f(x) на отрезке [a; b] и обозначают $\int_a^b f(x)dx$.

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ - *формула Ньютона-Лейбница.*

Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию:

1. Что называется первообразной функции f(x)?

2. Что называется определенным интегралом функции f(x)?
3. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла?

Задания для практического занятия:

Задание № 1. Вычислить определенный интеграл.

1) $\int_0^1 x dx$ **2)** $\int_{-1}^1 8x^3 dx$

3) $\int_1^4 \sqrt{x} dx$ **4)** $\int_0^2 (5x^3 + 6) dx$ **5)** $\int_1^2 \frac{7x^2}{5} dx$ **6)** $\int_0^1 e^x dx$ **7)** $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x dx$

8) $\int_0^{\pi/2} (\cos x + \sin x) dx$ **9)** $\int_3^6 \frac{3dx}{5x}$ **10)** $\int_{-1}^{\sqrt{3}/2} \frac{6dx}{\sqrt{1-x^2}}$

11) $\int_0^1 \frac{3dx}{2(1+x^2)}$ **12)** $\int_{-1}^1 (2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4) dx$ **13)** $\int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$ **14)** $\int_2^{-3} \frac{x^4 - x^2}{x^2 + x} dx$

15) $\int_1^2 \frac{1 + x + x^2 + x^3}{x} dx$ **16)** $\int_e^{2e} \frac{x + \sqrt{x}}{x\sqrt{x}} dx$

Форма контроля выполнения практических работ

Выполненная работа представляется преподавателю в тетради для выполнения практических работ по дисциплине «Математика».

Инструкция по выполнению практической работы

В данных задании Вы должны вычислить определенный интеграл, используя формулу Ньютона-Лейбница методом непосредственного интегрирования.

Методика анализа результатов, полученных в ходе практической работы

В результате решения задач у вас должно получиться выражение – множество первообразных для данной функции.

Порядок выполнения отчета по практической работе

1. В тетради для практических работ напишите номер практической работы и ее название.

2. Далее должно быть заглавие «Задание 1».

3. Под заглавием записывается условие задачи, решение и ответ (так для каждого примера из задания).

Образец отчета по практической работе

Задание №1Вычислить определенный интеграл.

1. $\int_0^{\pi}(2e^{2x}+3\cos x)dx$

Решение.

$$\int_0^{\pi}(2e^{2x}+3\cos x)dx=2\int e^{2x}dx+3\int_0^{\pi}\cos xdx=(2\cdot\frac{1}{2}e^{2x}+3\sin x)\Big|_0^{\pi}=(e^{2\pi}+\cos\pi)-(e^0+\cos 0)=$$
$$e^{2\pi}-1.$$

2. $\int_1^e \frac{dx}{3x}$

Решение

$$\int_1^e \frac{dx}{3x}=\frac{1}{3}\int_1^e \frac{dx}{x}=\frac{1}{3}\ln\Big|_1^e=\frac{1}{3}(\ln e-\ln 1)=\frac{1}{3}(1-0)=\frac{1}{3}$$

3. $\int_0^1 \frac{4dx}{1+x^2}$

Решение

$$\int_0^1 \frac{4dx}{1+x^2}=4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=4arctgx\Big|_0^1=4(arctg1-arctg0)=4(\frac{\pi}{4}-0)=\pi$$

4. $\int_{-1}^2 (x^2+2x+1+\frac{1}{x^2})dx$

Решение

$$\int_{-1}^2 (x^2+2x+1+\frac{1}{x^2})dx=\int_{-1}^2 x^2dx+\int_{-1}^2 2x\cdot dx+\int_{-1}^2 dx+\int_{-1}^2\frac{dx}{x^2}=\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^2+2\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^2+x\Big|_{-1}^2+\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\Bigg|_{-1}^2=$$
$$=\left(\frac{2^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3}\right)+\left(2^2-(-1)^2\right)+\left(2-(-1)\right)-\frac{1}{x}\Bigg|_{-1}^2=\left(\frac{8}{3}+\frac{1}{3}\right)+(4-1)+3-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(-1)}\right)=3+3+3+1{,}5=10{,}5$$

Самостоятельная работа № 8

«Площадь криволинейной трапеции»

Учебная цель: Обобщить и систематизировать знания по теме «Элементы дифференциального и интегрального исчисления»; закрепить умения интегрировать функцию, используя таблицу основных интегралов, сформировать умения вычислять площадь плоской фигуры с помощью определенного интеграла.

Учебные задачи:

1. Создать условия для развития способностей обучаться самостоятельно, для формирования системы знаний и общих компетенций, связанных с темой «Определенный интеграл. Площадь криволинейной трапеции».

2. Обеспечить проверку и оценку знаний и способов деятельности студентов.

3. Обобщение и систематизация материала, изученного по теме «Определенный интеграл. Площадь криволинейной трапеции».

Образовательные результаты, заявленные во ФГОС третьего поколения:

Студент должен

уметь:

- решать задачи на отыскание первообразной функции;
- применять таблицу интегралов основных элементарных функций для отыскания определенного интеграла;
- решать задачи на вычисление определенного итеграла;
- решать задачи на вычисление площади криволинейной трапеции.

знать:

- понятие первообразной функции;
- понятие определенного интеграла;
- основные правила и формулы итегрирования;
- понятие криволинейной трапеции;
- правила вычисления площади криволинейной трапеции.

Задачи практической работы:

1. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
2. Ответить на вопросы для закрепления теоретического материала.
3. Решить 6 задач на отыскание площади криволинейной трапеции с помощью определенного интеграла.
4. Оформить решение в тетради.

Обеспеченность занятия (средства обучения):

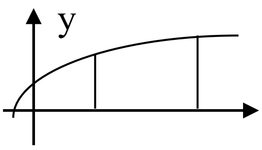
1. Тетрадь для практических работ *(в клетку, 12 листов).*
2. Ручка.
3. Рабочая тетрадь с теоретическим материалом (конспекты лекций).

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы.

План вычисления площади криволинейной трапеции:

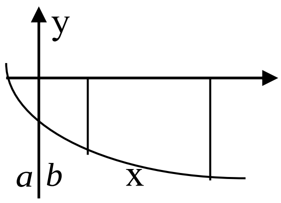
1. Схематический чертеж.
2. Представление искомой площади как суммы или разности площадей.
3. Записать каждую функцию в виде $y = f(x)$.
4. Вычислить площадь каждой криволинейной трапеции или площади искомой фигуры.

Площади фигур.



S

a *b* x



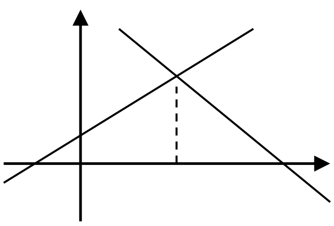
S

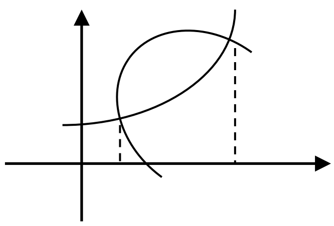
$S = \int_a^b f(x)dx$

$S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$

Если рассмотренная фигура не является криволинейной трапецией, тогда площадь нужно представить как сумму или разность криволинейных трапеций.

m





n

S_1 S_2

a *b*

$S = S_1 + S_2$ $S = S_{amb} - S_{anb}$

Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию:

1. Что называется первообразной функции f(x)?
2. Что называется определенным интегралом функции f(x)?
3. Формула Ньютона-Лейбница.
4. Свойства определенного интеграла.
5. Сформулируйте понятие криволинейной трапеции.
6. Сформулируйте правила нахождения площади криволинейной трапеции.

Задания для практического занятия:

Задание № 1. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями.

1) x – y + 2 = 0, y = 0, x = -1, x = 22) x – y + 3 = 0, x + y – 1 = 0, y = 0

3) y = x^2, y = 0, x = 0, x = 3 4) $f_1(x) = \frac{5}{x}, \quad f_2(x) = 6 - x$

5) $f_1(x) = 1 - x^2, \quad f_2(x) = x^2 - 1$ 6) y = cosx, y = 0, x = 0, x = π/2

Задание № 2. Решить задачу.

Точка движется по оси абсцисс так, что скорость ее в произвольный момент времени t задается формулой $v(t) = \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$. Найдите положение точки в момент времени $t = \frac{\pi}{2}$, если в момент времени $t = \frac{\pi}{4}$ она имела абсциссу, равную -1.

Форма контроля выполнения практических работ

Выполненная работа представляется преподавателю в тетради для выполнения практических работ по дисциплине «Математика».

Инструкция по выполнению практической работы

В первом задании Вы должны вычислить площадь криволинейно трапеции с помощью определенного интеграла, используя формулу Ньютона-Лейбница. Сначала необходимо построить данную фигуру, а затем найти площадь полученной фигуры.

Во втором задании Вы должны воспользоваться физическим смыслом определенного интеграла.

Методика анализа результатов, полученных в ходе практической работы

В результате решения задач у вас должно получиться положительное число, выражающее площадь плоской фигуры.

Порядок выполнения отчета по практической работе

1. В тетради для практических работ напишите номер практической работы и ее название.
2. Далее должно быть заглавие «Задание 1».
3. Под заглавием записывается условие задачи, решение и ответ (так для каждого примера из задания).
4. Задание 2 оформляется аналогично.

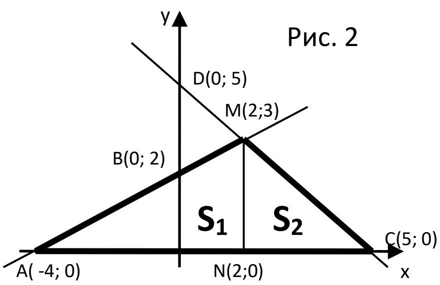
Образец отчета по практической работе

Задание №1Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x - 2y + 4 = 0$, $y = 0$ и$x + y – 5 = 0$.

Решение**.** Выполним построение фигуры. Построим прямую $x - 2y + 4 = 0$: $y = 0$, $x = -4$, A(-4; 0);$x = 0$, $y = 2$, B(0; 2). Построим прямую $x + y – 5 = 0$: $y = 0$, $x = 5$, C(5; 0);$x = 0$, $y = 5$, D(0; 5).

Найдем точку пересечения прямых, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} x-2y+4=0, \\ x+y-5=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2y-4, \\ 2y-4+y-5=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2y-4, \\ 3y=9. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2y-4, \\ y=3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=3. \end{cases} \Rightarrow M(2;3)$$



Для вычисления искомой площади разобьем треугольник AMC на два треугольника AMN и NMC, так как при изменении *x* от A до N площадь ограничена прямой $x - 2y + 4 = 0$, а при изменении *x* от N до C – прямой $x + y – 5 = 0$.

Для треугольника AMN имеем: $x - 2y + 4 = 0$; $y = 0,5x + 2$, т.е. $f(x) = 0,5x + 2$, $a = -4$, $b = 2$. Для треугольника NMC имеем: $x + y – 5 = 0$, $y = 5 – x$, т.е. $f(x) = 5 – x$, $a = 2$, $b = 5$.

$$S = S_1 + S_2 = \int_{-4}^{2}(0{,}5x+2)dx + \int_{2}^{5}(5-x)dx = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_{-4}^{2} + \left(5x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{2}^{5} = \left(\left(\frac{2^2}{4}+2\cdot 2\right)-\left(\frac{(-4)^2}{4}+2\cdot(-4)\right)\right.$$

$$\left.+\left(\left(5\cdot 5-\frac{5^2}{2}\right)-\left(5\cdot 2-\frac{2^2}{2}\right)\right)\right) = (1+4-4+8)+(25-12{,}5-10+2) = 9+4{,}5 = 13{,}5$$

Ответ. S = 13, 5 кв. ед.

Практическая работа № 8.1

«Вычисление объемов тел вращения с помощью определенного интеграла»

Учебная цель: Обобщить и систематизировать знания по теме «Элементы дифференциального и интегрального исчисления»; закрепить умения интегрировать функцию, используя таблицу основных интегралов, умения вычислять объемы тел вращения с помощью определенного интеграла.

Учебные задачи:

1. Создать условия для развития способностей обучаться самостоятельно, для формирования системы знаний и общих компетенций, связанных с темой «Определенный интеграл. Объемы тел вращения».

2. Обеспечить проверку и оценку знаний и способов деятельности студентов.

3. Обобщение и систематизация материала, изученного по теме «Определенный интеграл. Объемы тел вращения».

Образовательные результаты, заявленные во ФГОС третьего поколения:

Студент должен

уметь:

– решать задачи на отыскание первообразной функции;
– применять таблицу интегралов основных элементарных функций для отыскания определенного интеграла;
– решать задачи на вычисление определенного интеграла;
– решать задачи на вычисление объемов тел вращения.

знать:

– понятие первообразной функции;
– понятие определенного интеграла;
– основные правила и формулы интегрирования;
– понятие криволинейной трапеции;
– формулы вычисления объемов тел вращения

Задачи практической работы:

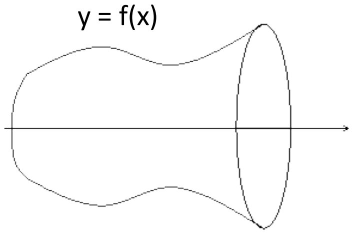
1. Повторить теоретический материал по теме практической работы.
2. Ответить на вопросы для закрепления теоретического материала.
3. Решить 6 задач на отыскание объема тел вращения с помощью определенного интеграла.
4. Оформить решение в тетради.

Обеспеченность занятия (средства обучения):

1. Тетрадь для практических работ *(в клетку, 12 листов).*
2. Ручка.
3. Рабочая тетрадь с теоретическим материалом (конспекты лекций).

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы.

***Объем тел вращения*.**



Рассмотрим кривую, заданную уравнением y = f(x). Предположим, что функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b]. Если соответствующую ей криволинейную трапецию с основаниями a и b вращать вокруг оси Ox, то получим так называемое **тело вращения**.

Т.к. каждое сечение тела плоскостью x = const представляет собой круг радиуса $R = |f(x)|$, то объем тела вращения может быть легко найден по полученной выше формуле:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

***Формулы объемов тел вращения около*:**

оси *Ox*$V = \pi\int_a^b y^2dx$; о***си Oy*** $V = \pi\int_a^b x^2dy$

Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию:

1. Что называется первообразной функции f(x)?
2. Что называется определенным интегралом функции f(x)?
3. Формула Ньютона-Лейбница.

4. Свойства определенного интеграла.
5. Сформулируйте понятие тела вращения.
6. От чего зависит выбор формулы для нахождения объема тела вращения?

Задания для практического занятия:

Задание № 1. Найти объемы тел вращения, образованных вращением вокруг оси Ох площадей, ограниченных линиями.

1) $y^2 – 4x = 0$, $x – 2 = 0$, $x – 4 = 0$, $y = 0$

2) $y^2 – x + 1 = 0$, $x – 2 = 0$, $y = 0$

3) $y = - x^2 + 2x$, $y = 0$

4)$y^2 = 2x$, $x – 2 = 0$

5) Осью*Ох*иполуволнойсинусоиды$y = \sin x$ $(0 \le x \le \pi)$.

Задание № 2. Найти объемы тел вращения, образованных вращением вокруг оси Оу площади, ограниченной линиями $y = -2x^2 + 5$и прямыми $x = 0$, $y = -1$.

Форма контроля выполнения практических работ

Выполненная работа представляется преподавателю в тетради для выполнения практических работ по дисциплине «Математика».

Инструкция по выполнению практической работы

В первом и втором заданиях Вы должны вычислить объем тел вращения с помощью определенного интеграла. Сначала необходимо построить данную фигуру, а затем найти ее объем, пользуясь соответствующими формулами для нахождения объемов тел вращения.

Методика анализа результатов, полученных в ходе практической работы

В результате решения задач у вас должно получиться положительное число, выражающее площадь плоской фигуры.

Порядок выполнения отчета по практической работе

1. В тетради для практических работ напишите номер практической работы и ее название.
2. Далее должно быть заглавие «Задание 1».
3. Под заглавием записывается условие задачи, решение и ответ (так для

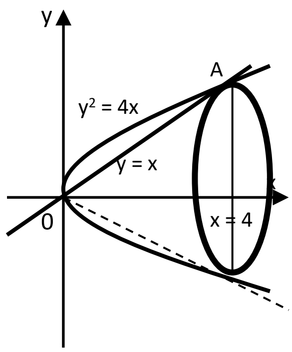
каждого примера из задания).

4. Задание 2 оформляется аналогично.

Образец отчета по практической работе

Задание №1**.** Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* площадки, ограниченной линиями $y^2 = 4x$и$y = x$.

Решение. Решив систему $\begin{cases} y^2 = 4x, \\ y = x. \end{cases}$ находим точки пересечения параболы и прямой: O (0; 0) и A (4; 4). Следовательно, пределы интегрирования a = 0 и b = 4. Объем тела вращения представляет собой разность объемов параболоида, образованного вращением кривой $y^2 = 4x$ (V_1) и конуса, образованного вращением прямой $y = x$ (V_2). Тогда



$$V_1 = \pi\int_0^4 4x dx = \pi \cdot 2x^2\Big|_0^4 = \pi\left(2\cdot 4^2 - 2\cdot 0^2\right) = 32\pi$$

$$V_2 = \pi\int_0^4 x^2 dx = \pi \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^4 = \pi\left(\frac{4^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{64\pi}{3}$$

$$V = V_1 - V_2 = 32\pi - \frac{64\pi}{3} = \frac{96\pi - 64\pi}{3} = \frac{32\pi}{3}$$

Ответ: $V = \frac{32\pi}{3}$ (куб. ед.)

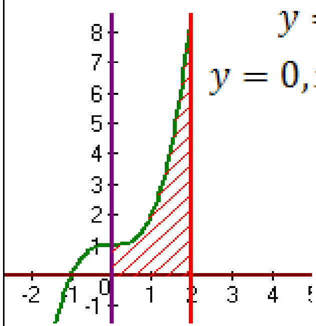
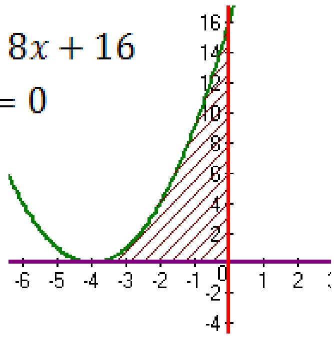
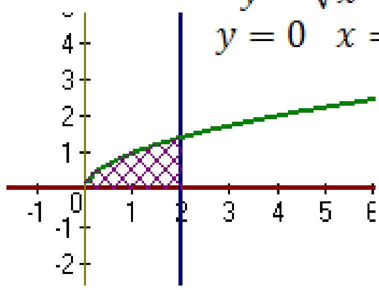
Задания для самостоятельной работы

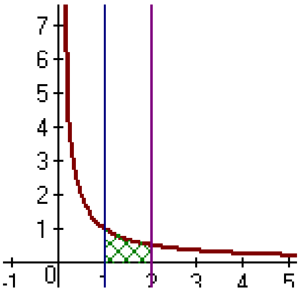
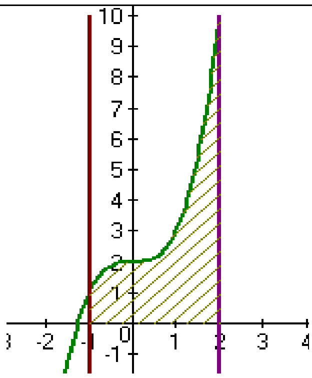
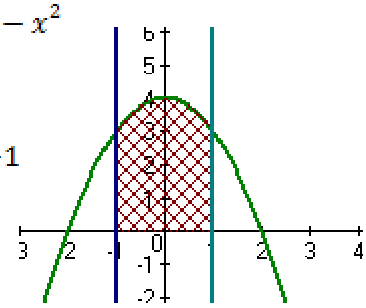
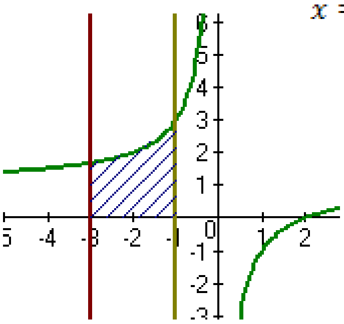
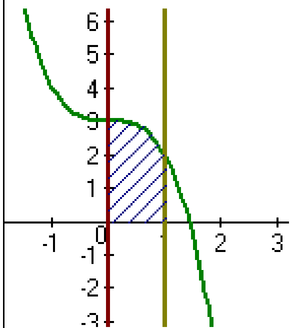
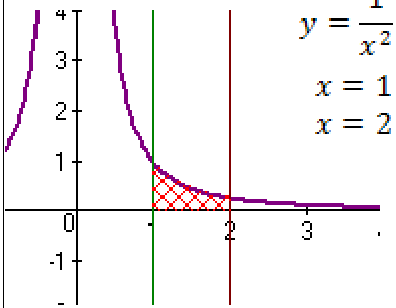
1. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной заданными линиями.

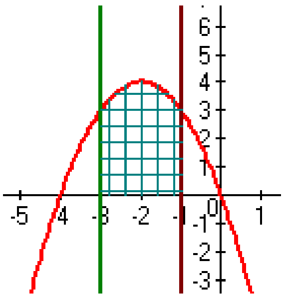
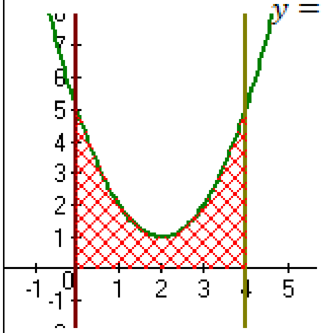
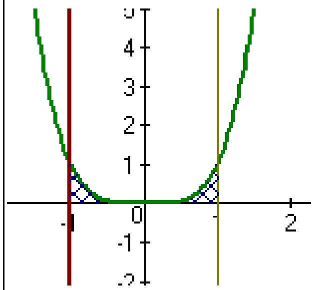
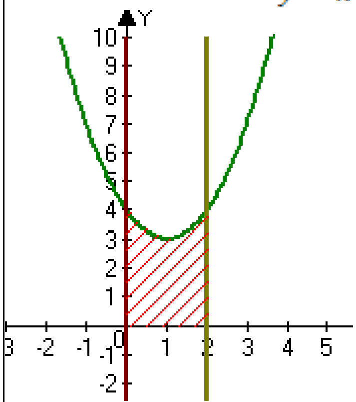
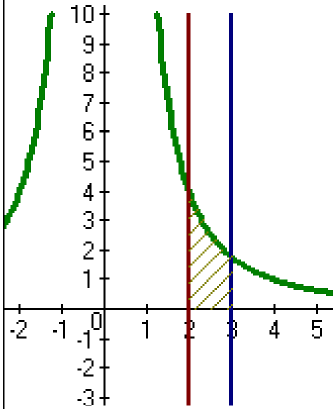
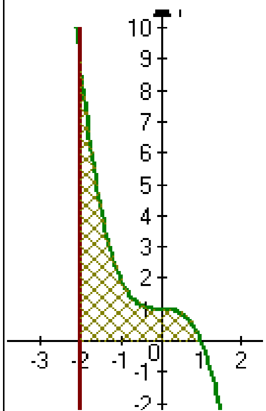
2.1 $y = x^2 - 4x + 4$ $x = 0 \quad y = 0$	**2.6** $y = x^2 - 4x + 3$ $x = 0 \quad y = 0$	**2.11** $y = x^2 + 5x + 6$ $y = 0 \quad x = 0$

2.2 $y = x^2 - 4x + 3$ $x = -1 \quad y = 0$	**2.7** $y = x^2 + 5x + 6$ $x = -4 \quad y = 0$	**2.12** $y = x^2 - 6x + 8$ $x = 0 \quad y = 0$
2.3 $y = x^2 - 6x + 8$ $x = 1 \quad y = 0$	**2.8** $y = 2x^2 + 4x + 7$ $x = -1 \quad x = 0$ y=0	**2.13** $y = -2x^2 + 4$ $x = -1 \quad x = 1$ y=0
2.4 $y = 2x^2 + 4x + 7$ $x = -2 \quad x = -1$ y=0	**2.9** $y = 2\sqrt{x}$ $x = 1$ $x = 4$ y=0	**2.14** $y = x^4$ $x = 0$ $x = 1$ y=0
2.5 $y = \frac{4}{x}$ $x = 2 \quad x = 3$ y=0	**2.10** $x = 2 \quad x = 0 \quad y = 2x + 3$ y=0	$y = -4x + 1$ **2.15** $x = 0$ $x = -2$ y=0

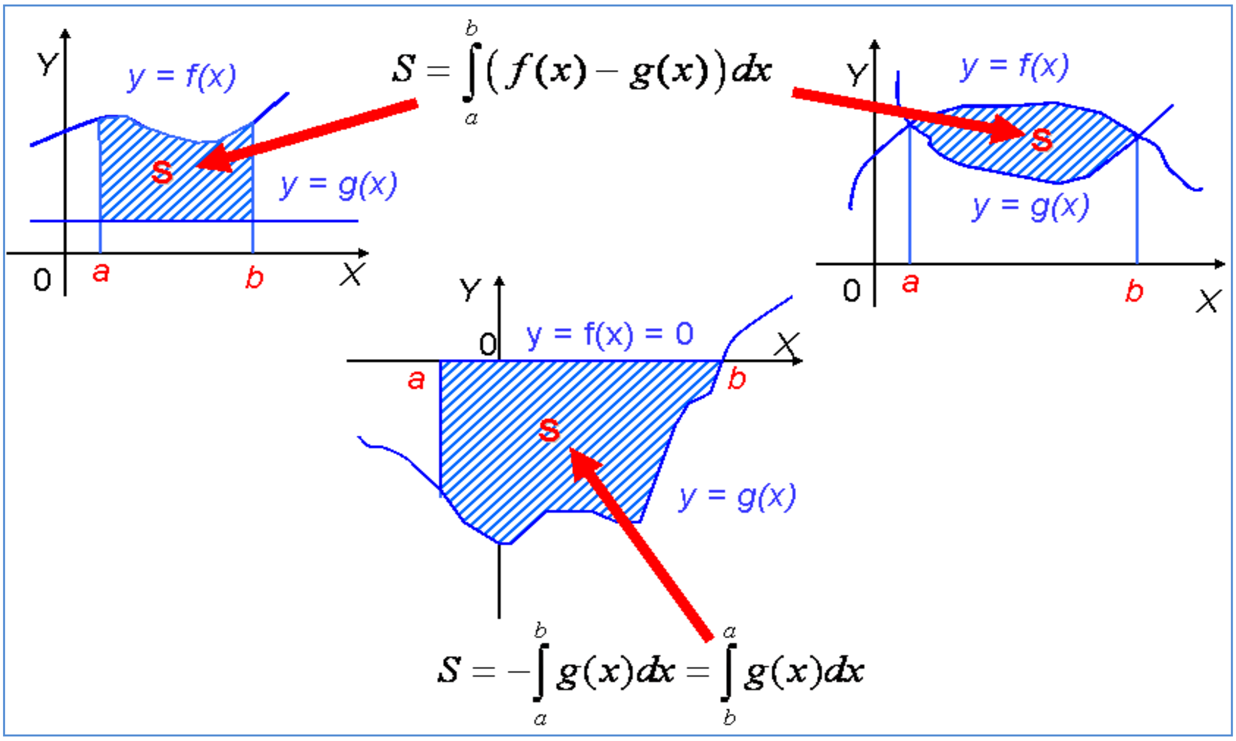
2. Найти площадь криволинейной трапеции, изображённой на рисунке.

 $y = x^3 + 1$ $y = 0, x = 0, x = 2$ **3.1**	**3.6** $y = x^2 + 8x + 16$ $y = 0, x = 0$ 	$y = \sqrt{x}$ $y = 0 \quad x = 2$ **3.11** 

3.2  $y = 0$ $x = 2$	**3.7** $y = x^3 + 2$ $x = -1$ $x = 2$ 	**3.12** $y = 4 - x^2$ $x = -1$ $x = 1$ 
3.3 $y = \frac{-2}{x} + 1$ $x = -1$  $x = -3$	 **3.8** $y = -x^3$ $x = 0$ $x = 1$	 $y = \frac{1}{x^2}$ $x = 1$ $x = 2$ **3.13**

$y=-x^2-4x$ **3.4**  $x=-3$ $x=-1$	 $y=x^2-4x+5$ $x=0$ **3.9** $x=4$	**3.14**  $y=x^4$ $x=-1$ $x=1$
3.5 $y=x^2-2x+4$  $x=0$ $x=2$	**3.10**  $y=\dfrac{16}{x^2}$ $x=2$ $x=3$	**3.15**  $y=1-x^3$ $x=-2$

3. Построить площадь криволинейной трапеции и вычислить её площадь, использую соответствующие формулы.



4.1 $y = x^2 - 4x + 4$ $y = 4 - x^2$	**4.2** $y = x^2 - 2x + 2$ $y = 2 + 6x - x^2$	**4.3** $y = x^2$ $y = x^3$
4.4 $y = x^2$ $y = 2x - x^2$	**4.5** $y = x^2$ $y = 2x$	**4.6** $y = 6 - 2x$ $y = 6 + x - x^2$

Раздел 2 Основы дискретной математики

Множества и отношения. Операции над множествами.
ОБЪЕДИНЕНИЕМ ДВУХ МНОЖЕСТВ Аи В называется третье множество, состоящем из тех и только и из тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств.
ПЕРЕСЕЧЕНИЕМ ДВУХ МНОЖЕСТВ Аи В называется третье множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно и множеству А, и множеству В.
РАЗНОСТЬЮ МНОЖЕСТВ Аи В называется множество А\В, состоящая из тех и только из тех элементов, которые принадлежат множеству А и не принадлежат множеству В.
СИММЕТРИЧЕСКОЙ РАЗНОСТЬЮ МНОЖЕСТВ Аи В называется
А дельта В, которая определяется по формуле (А\В)Ụ(В\А).

Практическая работа 2.1

1. Пусть А=$\{2;4;6;8;10;12\}$
   В=$\{3;6;9;12;\}$

   Найти $a)A\cap B,\ b)A\backslash$B, $в)A\cup$B

2. Пусть X = {1;2}, У={3,4}.

Найти: а) X$\cup$У   б)X$\cap$У   в) X\У

3. Пусть C = {3; 6; 9}
   N = {5; 10; 15}

Найдите   C$\cup$N, C \ N

4. Найдите первые пять элементов ряда по его заданному общему элементу:

а) $a_n = \dfrac{2n}{2n-1}$;   б) $u_n = \dfrac{n+1}{(2n-1)\bullet 3^{n-1}}$

5. Пусть C = {2; 4; 6; 8; 10}
   N = {3; 6; 9; 12}

Найдите C$\cup$N, C \ N

Практическая работа №2.1

Вариант 1

1. Пусть N- множество натуральных чисел, Z-множество целых чисел и множество A= {-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2}.

Найдите : а) $A \cap N$

Б) $A \cap Z$

В) $A \cup N$

Г) $A \cup Z$

2. Пусть A= {7,8,9} и B {8;9}.

Найдите :

А) $A \setminus B$

Б) $A \cup B$

В) $A \Delta B$

Вариант 2

1. Пусть N- множество натуральных чисел, Z-множество целых чисел и множество B = {-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4}.

Найдите : а) $B \cap N$

Б) $B \cap Z$

В) $B \cup N$

Г) $B \cup Z$

2.Пусть X = {2,4,6} и B {3;6}.

Найдите :

А) X \ У

Б) X∪ У

В) XΔ У

Вариант 3

1. Пусть N- множество натуральных чисел, Z-множество
целых чисел и множество Д = {2; 4; 6; 8; 10; 12}.

Найдите :

а) $D \cap N$

Б) $D \cap Z$

В) $D \cup N$

Г) $D \cup Z$

2. Пусть A= {1;2} и B {2;4;6}.
Найдите :

А) $A \setminus B$

Б) $A \cup B$

В) $A \Delta B$

Вариант 4

1. Пусть N- множество натуральных чисел, Z-множество целых чисел и множество C= {-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4}.

Найдите : а) $C \cap N$

Б) $C \cap Z$

В) $C \cup N$

Г) $C \cup Z$

2. Пусть M = {2;4;6} и N {5;10}.
Найдите :

А) $M \setminus N$

Б) $M \cup N$

В) $M \Delta N$

Основные понятия теории графов

Графом называется система объектов произвольной природы (вершин) и связок (ребер), соединяющих некоторые пары этих объектов.Граф можно рассматривать как объект, состоящий из двух множеств — множества точек (вершин) X и множества линий (рёбер) U, которые соединяют некоторые вершины. При этом совершенно несущественно, соединены ли вершины графа отрезками прямых линий или криволинейными дугами, какова длина линий, как расположены вершины графа на плоскости и другие геометрические характеристики графа. Каждое ребро представляет собой неупорядоченную пару вершин из множества X.

Математическая запись графа включает обозначения множеств вершин и рёбер, например,

$G = (X, U)$ (1)

где X – множество вершин; U – множество рёбер.

Пример 1 изображения графа G, состоящего из множества вершин $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ и множества рёбер $U = \{u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{15}, u_{24}, u_{25}, u_{35}\}$ представлен на рис. 1.

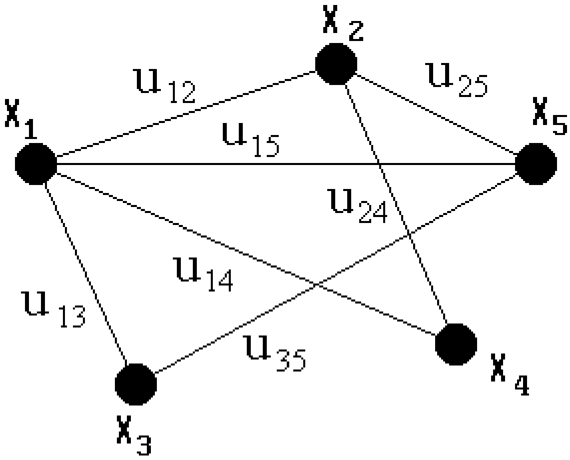


Рис. 1

Элементы множеств X и U могут содержать индексы. Индексы вершин обозначают их номера. Индексы рёбер обозначают номера соединяемых ими вершин. Запись u_{ij} означает, что ребро графа образовано парой вершин x_i x_j: $u_{ij} = (x_i, x_j)$, $x_i, x_j \in X$,

Маршрут — это последовательность рёбер $u_i \in U$, заданных парами вершин вида (x_1, x_2) (x_2, x_3) … (x_{l-1}, x_l), в которой любые два соседних ребра смежные. Количество рёбер в маршруте определяет его длину.

Если все рёбра в маршруте различны, то такой маршрут является **цепью**.

Если в цепи нет повторяющихся вершин, кроме соседних, то такая цепь называется **простой**.

Цепь, в которой совпадают начальная и конечная вершины, называется **циклом**.

Простая цепь, в которой совпадают начальная и конечная вершины, образует **простой цикл**.

Граф, представленный на рис. 1, содержит, например, маршрут

(x_1, x_3) (x_3, x_5) (x_5, x_2) (x_2, x_4) (x_4, x_1)
простую цепь
(x_1, x_3) (x_3, x_5) (x_5, x_2) (x_2, x_4)
простой цикл
(x_1, x_3) (x_3, x_5) (x_5, x_2) (x_2, x_1)
Две вершины $x_i, x_j \in X$, $x_i \neq x_j$ графа $G = (X, U)$ называются **связанными**, если их можно соединить маршрутом.
Граф $G = (X, U)$ называется **связным**, если любые две его вершины связаны маршрутом.
Связный граф без циклов называется **деревом**. В дереве любые две вершины связаны единственной цепью.

Общее количество деревьев d, которое можно построить на n вершинах, определяется по формуле
$d = n^{n-2}$

Число внутренней устойчивости η(G) определяется **мощностью** внутренне устойчивого подмножества, содержащего наибольшее число элементов, т.е. характеризует максимальное число несмежных вершин графа:

$\eta(G) = \max |\psi_i|$

Пример 2. Граф, представленный на рис. 2, имеет:

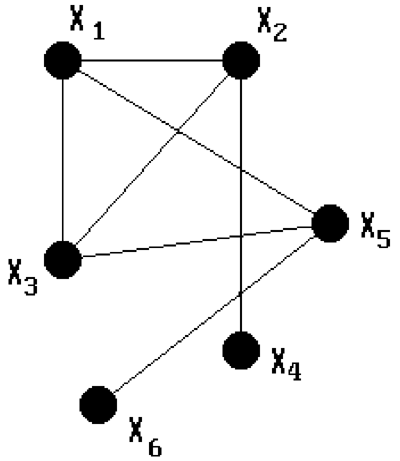


Рис. 2

$\Psi_1 = \{x_1, x_4, x_6\}$; $\Psi_2 = \{x_2, x_5\}$; $\Psi_3 = \{x_2, x_6\}$; $\Psi_4 = \{x_3, x_4, x_6\}$; $\Psi_5 = \{x_4, x_5\}$.

$\Psi_i = \{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \Psi_5\}$

Число внутренней устойчивости $\eta(G) = 3$.

Число внутренней полноты $\chi(G)$ определяет максимальное число вершин графа G, образующих полный подграф.

Практическая работа 2.2.

1.Какое наименьшее число переливаний необходимо для того, чтобы с помощью 7-и 11-литровых сосудов и крана с водой отмерить 2 литра?

2.Сколько существует различных трехзначных чисел, в записи которых участвуют лишь цифры 1, 2, 3 и 4?

Раздел 3. Основы теории вероятности и математической статистики

Практическая работа 3.1.

Тема: Решение задач на вероятность событий.

Цель: сформировать умение решать задачи на нахождение вероятностей.

При выполнении работы необходимо научиться:
- решать задачи на нахождение вероятностей.

Содержание практической работы.

Задание 1. Используя классическое определение вероятности события, решить следующие задачи:

1. В коробке 4 красных, 5 зеленых, 8 желтых, 7 белых и 1 черный шар. Найти вероятность вытащить: красный шар; синий шар; белый шар; цветной шар; или зеленый или белый шар; не красный шар; шар одного из цветов светофора.

2. В семье – двое детей. Какова вероятность, что старший ребенок – девочка, если известно, что в семье есть дети обоего пола?

3. Мастер, имея 10 деталей, из которых 4 – нестандартных, проверяет детали одну за другой, пока ему не попадется стандартная. Какова вероятность, что он проверит ровно две детали?

4. В одном ящике 3 белых и 7 черных шаров, в другом ящике – 6 белых и 8 черных шара. Найти вероятность того, что хотя бы из одного ящика будет вынут белый шар, если из каждого ящика вынуто по одному шару.

5. Издательство отправило газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,9, во второе - 0,7, в третье - 0,85. Найти вероятность следующих событий:

а) только одно отделение получит газеты вовремя;

б) хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием.

6. В первой урне находятся 12 белых и 4 черных шаров, а во второй 5 белых и 10 черных шаров. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными? Какова вероятность, что оба шара окажутся белыми?

7. В партии из 25 деталей находятся 8 бракованных. Вынимают из партии наудачу две детали. Определить, какова вероятность того, что обе детали окажутся бракованными.

8. Подброшены две игральные кости. Найти вероятность события А того, что выпадет хотя бы одна шестерка.

9. Найти вероятность, что при бросании игральной кости выпадет число, большее 4.

10. Найти вероятность, что при бросании игральной кости выпадет число, не меньшее 2 и не большее 5.

Задание 2. Используя формулы полной вероятности и Байеса, решить следующие задачи:

1. Имеются 2 одинаковые урны. В первой урне находятся 7 белых и 3 черных шаров, во второй – 6 белых и 4 черных. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Выбранный шар оказался черным. Какова вероятность, что этот шар из 2 урны?

2. Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру =0,5, ко второму =0,6. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером =0,94, а вторым =0,92. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

3. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартная равна 0,9, а второго – 0,8. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь – стандартная.

4. Имеются 3 одинаковые урны. В первой урне находятся 6 синих и 4 черных шаров, во второй – только синие и в третьей – только черные. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Какова вероятность, что этот шар синий?

5. Имеются 2 одинаковые урны. В первой урне находятся 7 белых и 3 черных шаров, во второй – 6 белых и 4 черных. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Выбранный шар оказался черным. Какова вероятность, что этот шар из 1 урны?

Задание 3. Используя формулу Бернулли, решить следующие задачи:

1. Вероятность того, что расход электроэнергии на продолжении одних суток не превысит установленной нормы равна 0,75. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

2. Найти вероятность осуществления от одного до трех разговоров по телефону при наблюдении шести независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0,6.

3. Прибор состоит из пяти элементов, включенных в цепь параллельно и работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за время Т равна 0,5. Для безаварийной работы прибора достаточно, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность того, что за время Т прибор будет работать безотказно?

4. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету =0,3. Какова вероятность того, что из семи приобретенных билетов три билета окажутся выигрышными?

5. Магазин получил 40 деталей. Вероятность наличия нестандартной детали в партии равна 0,04. Найти наиболее вероятное число нестандартных деталей в этой партии.

6. Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна 0,8. Найдя вероятности возможного числа появления бракованных деталей среди 5 отобранных, найти наивероятнейшее число появления бракованных деталей из 5 отобранных, указав его вероятность.

7. Сколько раз необходимо подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее выпадение тройки было равно 10?

8. Для данного участника игры вероятность набросить кольцо на колышек =0,3. Какова вероятность того, что при шести бросках 3 кольца окажутся на колышке?

9. На самолете имеются 4 одинаковых двигателя. Вероятность нормальной работы каждого двигателя в полете равна р. Найти вероятность того, что в полете могут возникнуть неполадки в одном двигателе.

10. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,4. Что вероятнее ожидать: отказ двух приборов при испытании четырех или отказ трех приборов при испытании шести, если приборы испытываются независимо друг от друга?

11. Вероятность того, что на некотором предприятии расход электроэнергии не превысит суточной нормы равна 0,8. Какова вероятность того, что в течение пяти рабочих дней из семи перерасхода электроэнергии не будет?

Вариант 1

1. Вычислите:

А) A_{20}^{3} ; Б) A_{n-3}^{4}; В) C_{10}^{5}; Г) C_{x+2}^{4}

2. Решите уравнение:

А) $A_{n-2}^{3} = 4A_{n-3}^{3}$ Б) $\frac{n!}{(n-4)!} = \frac{12n!}{(n-2)!}$

3. В одной урне находится 4 белых и 8 черных шаров, а в другой – 3 белых и 9 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

Вариант 2

1. Вычислите:

А) A_{4}^{2} ; Б) A_{n-2}^{4} ; В) C_{35}^{3}; Г) C_{m}^{4}

2. Решите уравнение:

А) $C_{n}^{5} = 18C_{n-2}^{4}$ Б) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30$

3. В ящике находятся 12 деталей, из которых 8 стандартных . Рабочий берет наудачу одну за другой две детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

Теоретические сведения к практической работе

Классическое определение вероятности

Раздел математики, изучающий закономерности случайных событий, называется теорией вероятностей.

Вероятностью P(A) события A в испытании с равновозможными элементарными исходами называют отношение числа исходов m, благоприятствующих событию A, к числуn всех исходов испытания.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Пример 1: В партии из 30 миксеров 2 бракованных. Найти вероятность купить исправный миксер.

$$n = 30, m = 30 - 2 = 28$$

$$P = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$$

Аксиомы вероятностей:

Каждому событию A поставлено в соответствие неотрицательное число P(A), называемое вероятностью события A.

Если события A_1, A_2 … попарно несовместны, то $P(A_1+A_2+\dots)=P(A_1)+P(A_2)+\dots$

Свойства вероятностей:

Вероятность невозможного события равна нулю P=0.

Вероятность достоверного события равна единице P=1.

Вероятность произвольного случайного события A заключается между 0 и 1: 0<P(A)<1.

Пример 2: Из 34 экзаменационных билетов, пронумерованных с помощью чисел от 1 до 34, наудачу извлекается один. Какова вероятность, что номер вытянутого билета есть число, кратное трем.

Решение: Найдем количество чисел от 1 до 34, кратных трем. Это числа 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33. Всего таких чисел 11. Таким образом, искомая вероятность $p = \frac{11}{34}$

События А и В называются совместными, если они могут одновременно произойти, и несовместными, если при осуществлении одного события не может произойти другое.

События А и В называются независимыми, если вероятность наступления одного события не зависит от того, произошло другое событие или нет.

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей слагаемых без вероятности произведения: P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)

Пример 3: Вероятность поражения одной мишени – 0,7, а другой – 0,8. Какова вероятность, что будет поражена хотя бы одна мишень, если по ним стреляют независимо друг от друга.

Решение: Т.к. события совместны, то $p = 0,7 + 0,8 - 0,7 \cdot 0,8 = 1,5 - 0,56 = 0,94$

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей слагаемых: P(A+B)=P(A)+P(B).

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

Условная вероятность – вероятность одного события, при условии, что другое событие уже произошло.

Вероятность произведения событий А и В равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого: P(AB)=P(A)·P(A/B) или P(BA)=P(A)·P(B/A)

Вероятность произведения двух независимых событий А и В равна произведению вероятностей сомножителей: P(AB)=P(A)·P(B).

Пример 4: В двух коробках лежат ручки разного цвета. В первой коробке – 4 красных и 6 черных, во второй – 3 красных, 5 синих и 2 черных. Из обеих коробок вынимают по одной ручки. Найти вероятность, что обе ручки красные.

Решение: Найдем вероятности вытащить красную ручку из каждой коробки

$n_1 = 10$

$m_1 = 4$

$p_1 = \frac{4}{10}$

$n_2 = 10$

$m_2 = 3$

$p_2 = \frac{3}{10}$

Тогда вероятность того, что обе ручки красные: $p = p_1 \cdot p_2 = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{12}{100} = 0{,}12$

Полная вероятность. Формула Байеса

Если событие А может произойти только при выполнении одного из событий H_1, H_2, …, которые образуют полную группу несовместных событий, то вероятность события А вычисляется по формуле

$$p(\mathrm{A}) = \mathrm{p}(\mathrm{H}_1) \cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_1) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_2) \cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_2) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_3) \cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_3) + \ldots$$

Эта формула называется формулой полной вероятности.

Если выполняются все условия, имеющие место для формулы полной вероятности, и $p(\mathrm{A}) \neq 0$, то выполняется равенство, называемое формулой Байеса:

$$p(\mathrm{H}_i /\, \mathrm{A}) = \frac{\mathrm{p}(\mathrm{H}_i) \cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_i)}{p(\mathrm{A})}$$

Пример 1: В первой партии 20 ламп, во второй – 30 ламп и в третьей – 50 ламп. Вероятности того, что проработает заданное время, равна для первой партии 0,7, для второй – 0,8 и для третьей партии – 0,9. Какова вероятность того, что наудачу взятая лампа проработает заданное время? Найти вероятность, что эта лампа принадлежит первой партии?

Решение: Пусть событие А – наудачу взятая лампа проработает заданное время.

Тогда, пусть H_1 – лампа из первой партии, H_2 – лампа из второй партии и H_3 – лампа из третьей партии. Тогда событие A/H_1 – лампа из первой партии проработает заданное время, A/H_2 – лампа из второй партии проработает заданное время и A/H_3 – лампа из третьей партии проработает заданное время. Найдем вероятности

$$n = 20 + 30 + 50 = 100$$

$$p(\mathrm{H}_1) = \frac{20}{100} = 0,2$$

$$p(\mathrm{H}_2) = \frac{30}{100} = 0,3$$

$$p(\mathrm{H}_3) = \frac{50}{100} = 0,5$$

$$p(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_1) = 0,7$$

$$p(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_2) = 0,8$$

$$p(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_3) = 0,9$$

$$p(\mathrm{A}) = \mathrm{p}(\mathrm{H}_1)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_1) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_2)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_2) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_3)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_3) =$$

$$= 0,2\cdot 0,7 + 0,3\cdot 0,8 + 0,5\cdot 0,9 = 0,14 + 0,24 + 0,45 = 0,83$$

Теперь, используя формулу Байеса найдем вероятность того, что эта лампа принадлежит первой партии

$$p(\mathrm{H}_1/\,\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{p}(\mathrm{H}_1)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_1)}{p(\mathrm{A})} = \frac{0,2\cdot 0,7}{0,83} \approx 0,169$$

Пример 2: Имеются 3 одинаковые урны. В первой урне находятся 5 белых и 7 черных шаров, во второй – только белые и в третьей – только черные. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Какова вероятность, что этот шар белый?

Решение: Пусть событие А – извлекается белый шар.

Тогда, пусть H_1 – шар из первой урны, H_2 – шар из второй урны и H_3 – шар из третьей урны. Тогда событие A/H_1 – белый шар из первой урны, A/H_2 – белый шар из второй урны и A/H_3 – белый шар из третьей урны. Найдем вероятности

$$p(\mathrm{H}_1)=\frac{1}{3}$$

$$p(\mathrm{H}_2)=\frac{1}{3}$$

$$p(\mathrm{H}_3)=\frac{1}{3}$$

$$p(\mathrm{A}/\mathrm{H}_1)=\frac{5}{12}$$

$$p(\mathrm{A}/\mathrm{H}_2)=1$$

$$p(\mathrm{A}/\mathrm{H}_3)=0$$

$$p(\mathrm{A})=\mathrm{p}(\mathrm{H}_1)\cdot\mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_1)+\mathrm{p}(\mathrm{H}_2)\cdot\mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_2)+\mathrm{p}(\mathrm{H}_3)\cdot\mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_3)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{12}+\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 0=\frac{5}{36}+\frac{1}{3}=\frac{17}{36}$$

Формула Бернулли

1) Вероятность того, что событие А наступит ровно m раз при проведении n независимых испытаний, каждый из которых имеет ровно два исхода вычисляется по формуле Бернулли $P_n(\mathrm{m})=\mathrm{C}_n^m\ p^m(1-p)^{n-m}, m=0,1,2,...,n$

Пример 1: Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна 0,2. Найти вероятность, что из 6 приобретенных билетов 2 окажутся выигрышными.

Решение:

$$p=0,2$$

$$n=6$$

$$m=2$$

$$P_n(\mathrm{m})=\mathrm{C}_n^m\ p^m(1-p)^{n-m}=\mathrm{C}_6^2\,0,2^2(1-0,2)^{6-2}=\frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot 0,04\cdot 0,8^4\approx 0,246$$

2) Вероятность наступления события А хотя бы один раз при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, равна $P_n(\mathrm{m}\geq 1)=1-\mathrm{q}^n, q=1-p$

Пример 2: Прибор состоит из шести элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за определенное время равна 0,6. Для безотказной работы прибора необходимо, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность, что за данное время прибор будет работать безотказно?

Решение:

$p = 0,6 \Rightarrow \quad q = 0,4$

$n = 6$

$m \geq 1$

$P_6(\mathrm{m} \geq 1) = 1 - 0,4^6 \approx 0,9959$

3) Вероятность наступления события А хотя бы один раз при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, наступит не менее m_1 и не более m_2 раз вычисляется по формуле $P_n(\mathrm{m_1} \leq \mathrm{m} \leq \mathrm{m_2}) = \sum_{m_1}^{m_2} P_n(\mathrm{m})$

Пример 3: Найти вероятность осуществления от двух до четырех разговоров по телефону при наблюдении пяти независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0,7.

Решение:

$p = 0,7$

$n = 5$

$2 \leq m \leq 4$

$P_5(2 \leq m \leq 4) = \mathrm{C}_5^2 \cdot 0,7^2(1-0,7)^{5-2} + \mathrm{C}_5^3 \cdot 0,7^3(1-0,7)^{5-3} + \mathrm{C}_5^4 \cdot 0,7^4(1-0,7)^{5-4} \approx 0,801$

4) Наивероятнейшее значение m_0 числа наступления события А при проведении n повторных независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, вычисляется по формуле
$np - q \leq m_0 \leq np + p$
$np - (1-p) \leq m_0 \leq np + p$

Пример 4: Магазин получил 50 деталей. Вероятность наличия нестандартной детали в партии равна 0,05. Найти наиболее вероятное число нестандартных деталей в партии.

Решение:

$p = 0,05$

$n = 50$

$m_0 - ?$

$q = 1 - p = 1 - 0,05 = 0,95$

$50 \cdot 0,05 - 0,95 \leq m_0 \leq 50 \cdot 0,05 + 0,05$

$1,55 \leq m_0 \leq 2,55$

$m_0 = 2$

Вопросы для подготовки к работе.

1. Дайте определение вероятности события.
2. Перечислите свойства вероятности.
3. Запишите формулу полной вероятности.
4. Запишите формулу Байеса.
5. Запишите формулу Бернулли.

Вопросы для подготовки к дифференциальному зачёту, экзамену по дисциплине «Математика»

1. Множества и подмножества
2. Операции над множествами
3. Диаграммы Эйлера-Вина
4. Предел функции. Теоремы о пределах
5. Понятие о производных. Основные правила дифференцирования.
6. Геометрический смысл производной
7. Формулы дифференцирования
8. Производные второго порядка.
9. Возрастание и убывание функций. Понятие максимума и минимума
10. Выпуклые функции. Точки перегиба.
11. Схема исследования функции
12. Понятие первообразных. Свойства первообразных функций.
13. Определение и основные свойства неопределенного интеграла.
14. Таблица основных интегралов
15. Основные методы интегрирования
16. Понятие определенного интеграла
17. Частные производные
18. Понятие о дифференциальном уравнении
19. Дифференцированные уравнения 1 порядка с разделяющимися переменными
20. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка
21. Аксиоматическое определение вероятности
22. Классическое определение вероятности
23. Теорема сложения вероятностей
24. Математическое ожидание случайной величины

25.Дисперсия и среднеквадратичное отклонение
27. Элементы комбинаторики. Размещения.
28. Элементы комбинаторики. Перестановки и сочетания

ЗАДАНИЯ К ЭКЗАМЕНУ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА»

1.Вычислите предел:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}$$

2.Вычислите предел:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{5x+1}$$

3.Найдите производную функций

$f(x)=\frac{1}{x^4}$, вычислить f^1 (-1) и f^1(2

4.Найдите производную функции $f(x)=\frac{\sqrt{x^2}}{x\sqrt{x}}$

5.Найдите производную функции

$$y=\frac{x^2}{2-x^2}$$

6.Найдите интеграл

y= $(x^2+6)\sqrt{x^2}$

7.Найдите интеграл

$$\int \frac{x-1}{x}dx$$

8.Найдите интеграл

$$\int\left(\frac{4}{3}x^3-\frac{3}{4}x^2+5\right)dx$$

9.Вычислите интеграл

$$\int_1^9\left(\frac{x-1}{x^2}\right)dx$$

10.Вычислите интеграл

$$\int_{-1}^{2}(x+1)^2dx$$

11.Найдите общее решение дифференцированного уравнения

$$\frac{dy}{\sqrt{x}}=\frac{3dx}{\sqrt{y}}$$

12.Найдите общее решение дифференцированного уравнения

$$\frac{dy}{x^2}=\frac{dx}{y^2}$$

Вариант 1.

1. Даны два множества А = $[0,1]$, В = $[-3,2]$

Построить $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$.

2.Найти производные функций:

а) $y = -7x^2 + 8$ б) $y = \sin(3x + 5)$

3.Найти промежутки возрастания и убывания и точки перегиба функции:
$y = x^3 - 6x^2$

4. Вычислить интегралы:
а) $\int (3ч-1)^2 dx$ б) $\int e^{2x} dx$

5. Найти общее решение дифференциального уравнения:

а) $dy \bullet x = dx \bullet y$

Вариант 2.

1. Даны два множества А = $[-\infty, 0]$, В = $[-2, 7]$
ПостроитьA $\cup$ B, A $\cap$ B, A\ B.

2. Найти производные функций:
а) $y = 5x^2 + 16$ б) $y = (7x - 5)^2$

3. Найти промежутки возрастания и убывания и точки перегиба функции:
$y = \frac{1}{6}x^4 - 4x^2 + 5$

4. Вычислить интегралы: а) $\int \frac{x^3 + 3x^2 + 4x}{x}$ dx б) $\int \cos(5x - 3)$ dx

5.Найти общее решение дифференциального уравнения:

а) $y^1 \bullet 2y = x$

Рекомендуемая литература

Основные источники

1. Григорьев С.Г., Иволгина С.В. Математика. – М.:Образовательно-издательский центр «Академия», 2018
2. Григорьев В.П., Сабурова Т.Н. Сборник задач по высшей математике. – М: Издательский центр «Академия», 2018

3. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. – М.: Высшая школа, 2017

Дополнительные источники:

1. Богомолов, Н. В. Сборник задач по математике . - М. : Дрофа, 2017
2. Омельченко, В. П. Математика. - Ростов на Дону : Феникс, 2008.
3. Щипачев В.С. Математический анализ. – М.: Высшая школа, 2007

Интернет-ресурсы:

1. http://siblec.ru – Справочник по высшей математике.
2. http://matclub.ru – Высшая математика, лекции, курсовые. примеры решения задач, интегралы и производные. дифференцирование, производная и первообразная, электронные учебники.
3. www.newlibrary.ru – Новая электронная библиотека.
4. www.mathnet.ru – Общероссийский математический портал.
5. www.edu/ru - Федеральный портал российского образования.
6. www. matburo.ru – Матбюро: решение задач по высшей математике.